La actividad matemática y su papel en nuestra concepción del mundo*

Sociedad Francesa de Filosofía
Sesión del sábado 27 de Febrero de 1965

(*Disertación de André Lichnerowicz*)

Traducción de

Pedro León Loyola L.

El Sr. A N D R E L I C H N E R O W I C Z, miembro del Instituto, profesor en el Colegio de Francia, se ha propuesto desarrollar ante los miembros de la Sociedad los argumentos siguientes:

*Lo que va a leerse es la traducción del texto íntegro contenido en el *Bulletin de la Société Française de Philosophie,* t. LVIII (59e. Année, 1965), Nº 4, París, Colín, 1966. (Cada uno de los números intercalados en esta traducción indica el comienzo de la respectiva página del texto original).

Como ocurre en todas las publicaciones similares de la Sociedad, la ahora traducida consta de tres partes:

a) El prospecto o resumen previo, escrito por el disertante, y que la Sociedad distribuye entre sus miembros con suficiente anterioridad.

b) El acta completa de la sesión, o sea, la disertación misma y el debate a que ella da origen.

c) Intervenciones por correspondencia, enviadas por quienes no van a asistir a la sesión, o por quienes, habiéndolo hecho y aun participado en la discusión, juzgan necesario hacer nuevas observaciones.

La autorización para que esto pudiera publicarse en los *Anales* la obtuve gracias a la bondadosa intervención del Sr. Edouard Pommier, Consejero Cultural de la Embajada de Francia. En su carta del 21 de junio del presente año, el Sr. Pommier me comunicó que el

"Nuestra razón, en cada instante, es el estado de espíritu matemático en ese instante", decía Brunschvicg. "La matemática es un devenir necesario, imprevisible e inagotable", decía por su parte Cavaillès. La matemática, por naturaleza, reflexiona sobre sí misma y se presenta como el testimonio más valioso del funcionamiento de nuestro espíritu. Por otra parte, ella es una de las principales claves para la comprensión del mundo científico y técnico que es nuestro mundo, y una de las fuentes de los poderes acrecentados del hombre.

En primer término, analizaremos la actividad matemática en sus dos tiempos: la actividad de *creación* y la actividad de *comunicación*. Veremos disociarse esas dos actividades en el curso de la historia del pensamiento matemático, y aparecer el estatuto actual al término de las "matemáticas clásicas" (desaparecidas entre 1900 y 1920).

[182]

La actividad de comunicación, la posibilidad de comunicación sin "ruido de fondo", se basa sobre la elaboración, cada vez más elaborada y consciente, de un tipo de discurso coherente y compulsivo para los demás, y, por eso mismo, *formalizable* (si no, en general, efectivamente formalizado). La característica primera del discurso matemático de comunicación es admitir la posibilidad de "diccionarios perfectos" o, en lenguaje técnico, la aplicación bi-

---

profesor Lichnerowicz y la Sociedad Francesa de Filosofía habían dado su consentimiento. En esa carta, el Sr. Consejero, entre otras expresiones igualmente generosas, estimulaba al traductor en estos términos: 'Je vous remercie vivement d'une initiative qui touche beaucoup nos collègues français, et je vous souhaite bon courage pour votre entreprise".

Por encargo del Sr. Rector, tengo el honor de agregar lo siguiente:

La Universidad de Chile se complace en dar público testimonio de su agradecimiento a los Sres. Pommier y Lichnerowicz y a la Sociedad Francesa de Filosofía, por su noble actitud. Y aprovecha la ocasión para informar al ilustre profesor del Colegio de Francia del agrado con que los matemáticos de Chile recuerdan las sabias lecciones que él les dio en Santiago hace algunos años. *(Nota del traductor).*

jectiva[1] de un conjunto sobre otro conjunto, respetando ciertas estructuras (isomorfismos). La identidad es así reemplazada, para el matemático, por el isomorfismo. Por lo tanto, el discurso matemático está desprovisto de toda significación univalente; pero, gracias a eso, no es generador de equívocos; es radicalmente no-ontológico, radicalmente inepto para hablar de ontología. Jamás está acabado, sino que debe ser elaborado constantemente a fin de ser portador de los mensajes matemáticos nuevos.

La lógica, cara al filósofo, se presenta para el matemático en tres niveles: según el sentido atribuido a la palabra lógica, ella puede ser la matemática en su totalidad, o sólo la matemática destinada a probar, a partir de un sistema anterior, la coherencia de lo que convencionalmente se llama "matemática propiamente dicha", o, finalmente, la teoría de las estructuras algébrico-lógicas. En todo caso, la lógica, *stricto sensu,* no parece poder ser exterior o anterior a la matemática, ni imponerle una ley previa, y, como ella, no podría ser fijada en un estado de una vez por todas.

La actividad de creación es enteramente diferente. Ella es "inspirada" a la vez por la matemática constituida misma y por tal o cual aspecto del mundo exterior. En el primer tipo de inspiración, son criterios de fecundidad y criterios estéticos los que entran en juego. En el segundo, la voluntad de inteligibilidad está muy lejos de sugerir estructuras matemáticas deseables; lo más frecuente es que haya "tentativa de deducción total" de un amplio aspecto de lo real, a partir de axiomas justificados sólo por sus consecuencias. Cualquiera que sea su "inspiración", el mate-

[1]En mi afán de ser en lo posible fiel al texto francés, he preferido usar el término *bijectivo,* y no su equivalente, *biunívoco,* que es el que aquí generalmente se emplea. Hace ya unos treinta años que el último de esos adjetivos fue usado por el Dr. Carlos Grandjot, en sus notables lecciones sobre teoría de los conjuntos, dadas en su Cátedra de Filosofía de las Ciencias Matemáticas y Físicas del Departamento de Filosofía del Instituto Pedagógico. *N. del T.*

mático creador se nos presenta como un hombre dotado de una imaginación y de una sensibilidad especiales; muy a menudo, crea y juzga con la ayuda de esta sensibilidad matemática, análoga a la sensibilidad musical o pictórica y se muestra más artista que hombre de ciencia. Discurre consigo mismo (rara vez con otro) por medio de un "autodiscurso" profundamente diferente del discurso de comunicación, un discurso menos abstracto y que quiere ser portador y generador de intuiciones creadoras, un discurso de tipo "poético". El paso de un discurso al otro se efectúa por ascesis. [183]

Es paradojal ver este juego del matemático, por lo general gratuito, morder en lo real y conferirle una cierta inteligibilidad. Tal vez la paradoja se desvanecerá parcialmente si se admite que no tenemos ninguna plena inteligencia constitutiva de una ciencia objetiva (es decir comunicable a otros sin deformación), salvo la inteligencia matemática. El poder de la matemática procede de su carácter no-ontológico, de su ascesis necesaria y es ese mismo carácter el que entra en juego en ese "savoir faire" que es nuestra ciencia. [184]

ACTA DE LA SESION

Se abrió la sesión a las 16.45 horas, en la Sorbona, Facultad de Letras, Sala Cavaillès, bajo la presidencia del Sr. Jean Wahl, presidente de la Sociedad.

JEAN WAHL. — Nos sentimos felices de tener hoy aquí al Sr. André Lichnerowicz, profesor en el Colegio de Francia y gran amigo de la filosofía. En efecto, es uno de nuestros anhelos ver confrontaciones entre filósofos y hombres de ciencia, verlas con más frecuencia, y me permito hacer un llamado a los sabios que ahora están aquí para que vengan, siguiendo el ejemplo del Sr.

Lichnerowicz, a hablarnos de la ciencia. Dándole las gracias, le ofrezco la palabra.

LICHNEROWICZ.— Espero que mi amistad hacia la filosofía no resulte desafortunada en exceso.

La matemática ha ejercido siempre sobre los filósofos un indudable poder de atracción. En el pasado, los grandes filósofos frecuentemente fueron grandes matemáticos y si ya no ocurre lo mismo —trataremos de saber por qué— subsiste el hecho de que, ante todo hombre que piensa, la matemática posee, en el conjunto de las ciencias, un estatuto especial. Ella tiene importancia aun para el espíritu menos preocupado de técnica o de conocimiento científico del universo concreto; tiene importancia porque es experiencia pura, de buena gana yo diría purificada, de la inteligencia en acción.

A pesar de que la matemática es tal vez la ciencia que en su larga historia más ha evolucionado en sus intereses, en sus objetos, en sus métodos de aproximación, con demasiada frecuencia se la concibe como disecada en estado de cadáver, y buenos espíritus llegan a preguntarse: "¿cómo es posible todavía crear en matemáticas?".

Cavaillès, en esta misma sala, respondía: "La matemática es un devenir necesario, imprevisible e inagotable". Consagraré esta exposición a hacer algunas reflexiones sobre la actividad matemática misma, cogida en su interioridad. Mi propósito no es exponer mis ideas personales sobre el asunto, sino más bien presentaros un testimonio que exprese la manera de ver de todos mis hermanos en matemáticas.

[185]

Me parece que en la actividad matemática, como en muchas otras actividades humanas, deben distinguirse dos tiempos: la actividad de *creación* y la actividad de *comunicación*. La matemática contemporánea no es sólo el conjunto de las proposiciones contenidas en un Bourbaki ideal, es también el conjunto de las motivaciones de esas proposiciones, el de los problemas abiertos en que se mezclan el pasado y el porvenir; y se encuentra encarnada en la comunidad de los matemáticos que están trabajando en cualquiera parte del mundo.

Procediendo con buen método, conviene ante todo comprender, mediante una rápida visión de los grandes momentos matemáticos de la historia, cómo los dos tiempos mencionados han estado separados, antes de elaborar su *modus vivendi*. No se me oculta hasta qué punto lo que voy a decir carecerá de imparcialidad y será fragmentario e incompleto; procuraré, sin embargo, no deformar la perspectiva.

*

Entre los caldeos y egipcios, hallamos el conocimiento del ángulo de dos estrellas, de la superficie de un campo rectangular o a veces trapezoidal, del volumen de un cubo o de una pirámide regular. Pero lo que nosotros llamamos razonamiento, por lo general está ausente o no está sino esbozado a base de ejemplos.

Es con los griegos con quienes aparece en forma consciente la primera ambición matemática y la voluntad de construir un tipo de discurso coherente y compulsivo para los demás, capaz, por lo tanto, de hacer imposible el rechazo de su contenido. Matemática, lógica y filosofía nacen simultáneamente, se entremezclan en parte, usan un lenguaje poco diferenciado, que varía sólo en relación con la naturaleza de los objetos. Dos obstáculos graves, sin embargo, dificultan la labor de la matemática griega, y se necesitarán siglos para superarlos. Ni en Euclides el discurso es concebido como *hipotéticamente* compulsivo: las premisas del razonamiento no son establecidas por un acto libre, sino que se pretenden dotadas de cierta evidencia, común y previa a la actividad matemática. Existe, por otra parte, un plano privilegiado de los "objetos matemáticos", de los "seres matemáticos", objetos idealizados sugeridos por la contemplación del cielo o por los problemas de la tierra, a lo menos los que atañen a la arquitectura, el comercio y la navegación. Esos dos obstáculos marcarán fuertemente el desarrollo de la matemática hasta el siglo XIX, y en primer término el de la matemática griega.

[186]

La aritmética griega, ciencia de los números, no reconoce en sus comienzos estatuto matemático sino a los enteros y a las fracciones o proporciones; pero ha logrado elaborar una teoría de las leyes elementales de composición sobre esos números. Esta aritmética rudimentaria no conoce el cero, "objeto ausencia de objeto", y *a fortiori* ignora la numeración de posición. La representación de los enteros por unidades discretas trae consigo especulaciones de estilo pitagórico, bastante malsanas desde el punto de vista científico.

La geometría, ciencia de las figuras planas o espaciales, fue para los griegos, y a justo título, la reina de las ciencias. Basada sobre una estructura extremadamente rica —si me perdonáis el anacronismo—, es con ella con la que el espíritu humano va a aprender verdaderamente lo que es un razonamiento y a adquirir la experiencia de muchas trampas que pueden presentarse. Ella conducirá a la presentación axiomática de Euclides —que con demasiada frecuencia sigue siendo la nuestra en la segunda enseñanza— y culminará en la teoría de las secciones cónicas.

Empero, si el programa de Euclides parece ser el mismo que nosotros desearíamos, su realización está muy lejos, a causa de su falta de bases, de concluir en un cuerpo de doctrina riguroso. La mitad de los "razonamientos" de los primeros libros de Euclides son en verdad "seudorrazonamientos"; así ocurre, por ejemplo, con todo lo concerniente a los diversos casos de igualdad de triángulos. Simples retoques no pueden ser suficientes para dar solidez al edificio: la sutileza griega ha logrado disimular la profunda falta de rigor, mediante algunas dosis de "evidencia" introducidas hábil y subrepticiamente. Si nuestros niños no siempre comprenden la geometría elemental, con mucha frecuencia hay razones para ello.

Por otra parte, todo lo que concierne a la medición de las magnitudes es deficiente. Eso está en relación con la falta de estatuto matemático de los números reales. Es sabido que la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado con el lado del mismo, el hecho de que $\sqrt{2}$ no es un número "racional", fue la ocasión del primer escándalo científico de la historia. Eso resultaba del conflicto entre una aritmética demasiado rudimentaria y una geometría que, desde sus primeros pasos, introducía necesariamente los números reales, no sólo los algebraicos como $\sqrt{2}$, sino también los trascendentes como π. Los "irracionales" recibieron un estatuto provisional, pero que duró siglos; se trabajará con ellos, pero sin lograr hacerlos objeto de una teoría elaborada; llegarán a ser un

[187]

instrumento heurístico necesario. En ciertos períodos, la familiaridad adquirida disfrazará, una vez más, la deficiencia, pero el problema permanecerá presente en la conciencia de los matemáticos, y en la segunda mitad del siglo XIX se verá surgir una teoría, o más bien varias teorías equivalentes, de los números reales, sobre las cuales fundar de modo sólido todas las matemáticas históricamente anteriores. A base de este ejemplo privilegiado de los números reales, se ve que, durante más de veinte siglos, las diferentes partes de las matemáticas han estado muy lejos de tener la misma coherencia, situación que actualmente ha desaparecido.

Las aplicaciones técnicas de esta matemática griega constituida no son muy numerosas: agrimensura, astronomía aplicada a la navegación, estática de las máquinas simples, óptica de los espejos. Arquímedes, con su obra matemática y sus aplicaciones a la mecánica y a la óptica, puede simbolizar el apogeo de la ciencia griega.

La matemática griega no comporta verdaderamente el álgebra, en el sentido ordinario del término. En vez de ella, se utilizaban pesados métodos llamados de "falsa posición". Desde el siglo VII hasta el XII, el álgebra madura principalmente en Persia y se difunde a través del imperio árabe. Al mismo tiempo aparece el cero y con él toda esta numeración de posición que es la nuestra y que facilitará la elaboración de una teoría de los números reales. Esta álgebra y esta aritmética perfeccionada llegan al Occidente principalmente a través de España.

El próximo paso va a venir del Occidente, creador simultáneo del análisis y de la dinámica. La geometría misma, sea bajo su forma pura, sea bajo su forma analítica, se interesa en adelante en curvas muy diferentes de las cónicas de los griegos, y le importa saber determinar sus tangentes, o calcular las áreas que ellas encierran. De Buridan a Galileo y luego a Descartes, la mecánica llega a su madurez y sabe al menos plantear sus problemas. Y ocurre que a todas esas cuestiones (investigación de las tangentes y de las velocidades, cálculo de las áreas, determinación de los movimientos) una misma operación, la derivación, y la operación inversa, la integración, son las que aportan la solución. Con las obras independientes de Leibniz y de Newton comienza la era moderna de las matemáticas clásicas.

Provista de este admirable instrumento del análisis, la ciencia matemática va a hacerse, en primer término, y durante un siglo, física matemática. Se va a asistir al gran desarrollo de la mecánica teórica, mecánica celeste primero, pero también mecánica terrestre e hidrodinámica, en seguida teoría del calor y de las vibraciones, y por último, con Ampère, estudio teórico de la electricidad.

[188]

Mas, desde 1830, al lado de esa poderosa escuela que explica matemáticamente una amplia clase de fenómenos físicos, y crea los instrumentos matemáticos correspondientes, comienza la reflexión sistemática de las matemáticas sobre ellas mismas, la que va a permitirles asumir por fin su ambición de coherencia y conocer los límites de esa ambición. Galois, creador de la noción de grupo, puede ser tomado como símbolo de *un siglo de esfuerzos* que va a traer la desaparición consciente y definitiva de los dos grandes obstáculos de que he hablado. Hay mutación de lo que puede llamarse "las matemáticas clásicas" en una matemática *una,* nuestra matemática contemporánea, en la cual la actividad de comunicación y la actividad de creación, reconciliadas, ocupan, respectivamente, el lugar que en justicia a cada una pertenece. En vez de sufrir pasivamente las estructuras y de reconocerlas un poco al azar, la matemática se esforzará en dominarlas.

*

Mi interés se fijará primero en la actividad de comunicación, en esa posibilidad de comunicación *prácticamente* exenta de lo que los especialistas de la teoría de la información llaman "ruido de fondo" y que parece inherente a todo mensaje.

Desde hace unos cuarenta años, la matemática comunicada, que es una con su comunicación misma, aparece como fundada íntegramente en la *teoría de los conjuntos,* con dos pilares principales: el álgebra en el sentido moderno y la topología. Para que podamos orientarnos en este universo matemático nuestro, es necesario que, descartando toda reflexión filosófica previa, yo dé alguna idea de la manera precisa en que ese universo es concebido por los matemáticos contemporáneos.

La noción primera adoptada es la de conjunto. Un conjunto está formado de *elementos* susceptibles de poseer ciertas *propiedades* y de tener entre ellos o con los elementos de otros conjuntos ciertas *relaciones.* Hay un determinado tipo de relación entre elementos de dos conjuntos E y F que es particularmente interesante: son las relaciones funcionales o *aplicaciones.* Una relación R entre elementos de E y elementos de F es llamada *aplicación de E en F* si, para todo elemento de E, existe un elemento de F y uno solo que esté en la relación R con él. Si una aplicación de E en F es tal que, para todo elemento de F, existe un elemento de E y uno solo que esté en la relación R con él, es decir, si R define también una aplicación de F en E, se dice que se trata de una *aplicación bijectiva de E sobre F.* Semejante aplicación realiza entre E y F un *diccionario perfecto.* Naturalmente, entre dos conjuntos cualesquiera, no existe por lo general tal diccionario.

[189]

Los elementos de un conjunto E que poseen una cierta propiedad forman un nuevo conjunto que es llamado *parte* o subconjunto de E. Lo que yo he llamado a veces la primera operación matemática, el hecho elemental de contar, es el establecimiento de un diccionario perfecto entre un conjunto y una parte de los enteros naturales. Pero se pueden hallar ejemplos elementales más refinados: a todo entero puede ser asociado el entero par que es su doble, y a todo entero par, su mitad. Se tiene en ese caso una aplicación bijectiva entre un conjunto, el de los enteros, y una parte de éste, el de los enteros pares. Es así como los matemáticos caracterizan lo que ellos llaman *conjuntos infinitos:* existe un diccionario perfecto entre una parte de un conjunto y el conjunto entero; bajo forma agresiva, entre el todo y la parte. Nunca ocurre esto con un conjunto compuesto de un número finito de elementos.

Sobre los conjuntos se pueden hacer diversas operaciones, de las cuales sólo dos son esenciales:

a) A partir de un conjunto E se puede definir *el conjunto de sus partes,* es decir, el conjunto cuyos elementos son las diferentes partes de E.

b) Si E y F son dos conjuntos, distintos o no, se puede definir un nuevo conjunto E $\times$ F que es su *producto* y cuyos elementos son las parejas de un elemento de E y de un elemento de F. Por cierto, esta operación se extiende a un número cualquiera de conjuntos, distintos o no.

Dados uno o varios conjuntos, dos por ejemplo, E y F, se puede, en consecuencia, formar otros, por las operaciones precedentes: tomar el conjunto de las partes de un conjunto o tomar el producto de varios conjuntos distintos o no. Repitiendo esas operaciones tantas veces como se quiera, se construye lo que se llama una *escala de conjuntos* de base E, F.

De eso se deduce fácilmente la noción de *estructura matemática,* puesto que siempre los datos elementales de las matemáticas se reducen, en último análisis, al dato de un solo elemento de uno de los conjuntos de una escala. Démonos un conjunto M de la escala de base E, F; démonos en seguida propiedades de un elemento de M que serán llamadas *los axiomas* y sea T la parte común a las

[190]

partes de M definidas por esas propiedades. Se dice que un elemento s de T define una *estructura de especie T* sobre los conjuntos E, F. Se caracterizará, pues, a las estructuras de especie T dándose:

el *esquema de formación* de M a partir de E y F,

los *axiomas de la estructura* que definen la parte T de M.

Si T es vacía, se dice que las estructuras de especie T no existen o que los axiomas son contradictorios.

Un carácter esencial de esta noción de estructura es que ella puede ser concebida independientemente de la naturaleza de los conjuntos de base. Para simplificar, supongamos que no haya más que un conjunto E de base y démonos una aplicación bijectiva de E sobre otro conjunto E'. De manera natural resultará una aplicación bijectiva entre conjuntos M y M' construidos, según el mismo esquema, en la escala de base E y en la escala de base E'. A una estructura s, elemento de M, definida sobre E, corresponderá una estructura s', elemento de M', definida sobre E'. Se dirá que las estructuras s y s' que se corresponden en este diccionario perfecto son *isomorfas.*

Las matemáticas pueden ser consideradas como la teoría de las estructuras de las diferentes especies. Puede ocurrir que, dada una especie de estructura, resulte de los axiomas de esas estructuras que éstas, si existen, son necesariamente isomorfas. Se dirá que la teoría de las estructuras correspondientes es *univalente;* en el caso contrario ella es *multivalente.* La teoría de los números reales, la de la geometría euclidiana, proporcionan ejemplos de teorías univalentes; la teoría de los grupos o la topología son teorías multivalentes.

En esta perspectiva, las matemáticas se han estudiado ellas mismas y se han constituido en una especie de mecano cuyas piezas son lo que llamamos las estructuras elementales, es decir, aquellas en que el número de axiomas es débil. En vez de comenzar el estudio de las matemáticas, como históricamente ha ocurrido, por estructuras muy ricas, como la de la geometría euclidiana, con su multiplicidad de axiomas, se deberá comenzar, según el *buen orden* de las matemáticas, por las piezas elementales, las estructuras muy pobres, las que deben encajarse las unas en las otras para formar esas maquinarias complejas que son las grandes teorías matemáticas contemporáneas. Las estructuras elementales interesantes, todas construidas con la misma coherencia y la misma solidez, pertenecen a dos tipos principales: las estructuras *algebraicas* en el sentido moderno del término y las estructuras *topológicas.*

Las primeras están construidas a partir de las leyes de composición entre elementos de uno o varios conjuntos.

[191]

Entre ellas, la más célebre y la más importante es la de *grupo,* que reina sobre toda la matemática y sus aplicaciones. La adición de los reales o la multiplicación de los reales no nulos, la composición de los desplazamientos del espacio ordinario que está en la base de toda la geometría euclidiana, el grupo de Lorentz que deja invariantes las ecuaciones de Maxwell y domina toda nuestra física teórica, proporcionan ejemplos elementales de grupo.

La *topología* se esfuerza en definir de manera coherente la noción de *vecindad* de un elemento de un conjunto independientemente de toda introducción de distancia. La noción de distancia conduce solamente a casos particulares. A la topología pertenecen tanto las nociones de tipo "límite de una serie" como la construcción efectiva y precisa de la noción de superficie o, más generalmente, de espacio.

*

¿Qué observaciones sugiere esta perspectiva de la matemática contemporánea que me he visto obligado a dar con algunos detalles, demasiado técnicos, según me parece?

Lo que llama la atención en primer término —creo yo— es la ausencia de toda metafísica de la identidad y de la cosa en sí. Cabe afirmar, en términos no técnicos, que no existe ningún nivel privilegiado de los objetos matemáticos sobre los cuales se opera, sino que las propias leyes de composición, así como las estructuras, pueden llegar a ser, a su vez, objetos matemáticos para una teoría situada a otro nivel de la escala. La identidad de naturaleza entre los entes matemáticos sobre los cuales se razona importa poco. Lo que importa es la posibilidad de esos diccionarios perfectos de que hablé y el correspondiente isomorfismo de las estructuras estudiadas. Para el matemático, la identidad es reemplazada por el isomorfismo y, a fin de hacer más fácil su lenguaje, con frecuencia identifica sin escrúpulos objetos de origen diferente, cuando un isomorfismo le asegura que procediendo de otro modo no haría sino pronunciar dos veces el mismo discurso en dos lenguas diferentes.

Se debe atenuar un tanto lo que acabo de decir, mediante algunas consideraciones referentes a la metamatemática. El paisaje que he descrito es, *grosso modo,* el de la matemática propiamente dicha, fundada sobre una teoría de los conjuntos convenientemente axiomatizada a la manera de Gödel y concebida como punto de partida. Mas, sabemos en adelante, principalmente gracias al propio Gödel, que la vieja ambición de un discurso que halle en sí mismo su propia justificación, que sea capaz de probar su propia coherencia, es un sueño. En términos más positivos, eso significa que es necesario

[192]

recurrir a una metamatemática para intentar probar dentro de ella la no-contradicción de la matemática misma, y así en seguida. Pero entre actividad matemática y actividad metamatemática, no hay diferencia alguna, ni solución de continuidad, y es sólo convencionalmente como fijamos aquí o allá un letrero que dice: "Aquí comienza el país de la matemática". Un metamatemático es indistinguible de un matemático, salvo en sus intereses. La matemática en sentido amplio, considerada como englobando a las metamatemáticas sucesivas (y es así, creo yo, como hay que concebirla), ha aprendido que es inagotable, no sólo en el sentido de la corriente —eso ella lo había adivinado siempre— sino también en el sentido contrario.

Hasta hace poco, el matemático propiamente dicho rehusaba remontar más allá de los conjuntos; ningún problema matemático lo invitaba a hacerlo. Sin embargo, en los diez últimos años, exigencias técnicas precisas lo han obligado a recurrir a una noción que antes era metamatemática, la de *categoría.* Si la colección de las variedades analíticas, por ejemplo, forma un conjunto, que obedece a los axiomas de Gödel, ya no ocurre lo mismo con ciertas colecciones que era indispensable considerar: la de los grupos, v. gr., o la de las variedades diferenciables. Esas colecciones forman categorías, noción más pobre y más general que la de conjuntos. El letrero ha quedado desplazado en consecuencia, por razones propiamente matemáticas.

He empleado a veces la expresión *ser matemático*. No tiene gran significación: un conjunto o una categoría, etc. . . . es, podría decirse, un conjunto o una categoría de cualesquiera cosas. Por lo tanto, todo objeto dado puede ser considerado como matematizable, siempre que se someta al tratamiento de los conjuntos, las categorías y al del isomorfismo, o sea, en términos más precisos, en la medida exacta en que lo dejado a un lado —todo el contenido ontológico— no nos importe. Es esencial, sí, hacer notar que lo que debemos desdeñar no puede ser definido de una vez para siempre. Puede decirse que, por la naturaleza misma de su discurrir, la matemática tiene *un carácter radicalmente no-ontológico,* o —si la expresión os parece preferible— pone a la ontología entre paréntesis. El discurso matemático aparece como una red de mallas arbitrariamente apretadas, pero que necesariamente deja escapar la onda ontológica. Si los grandes filósofos ya no se hacen matemáticos, ello se debe quizás a la toma de conciencia de ese hecho.

[193]

Otro carácter esencial de la matemática contemporánea es su unidad. Ella ha roto los viejos cuadros históricos, los cuales habrían tendido, al llenarse, a fragmentarla en disciplinas distintas, con evoluciones divergentes. La geometría, entre otras, está muerta en cuanto rama autónoma; ha llegado a ser el estudio de ciertas estructuras algébrico-topológicas particularmente interesantes. Se ve en qué grado el punto de vista de la matemática sobre sí misma se ha alejado del punto de vista que le dio nacimiento. Mas —como decía Bachelard— "en el reino del pensamiento científico, lo que merece el nombre de idea nueva es inmediatamente reorganización de las ideas antiguas". La autorreforma que la idea científica trae consigo nos ofrece un pasado nuevo, un pasado renovado, al mismo tiempo que un futuro que hay que construir. En ninguna parte eso es más verdadero que en esta matemática que quiere ser teoría pura y no un saber acumulado, y que, en adelante, se esfuerza en representarse a sí misma a cada instante y en su totalidad. El aparecimiento de las categorías, por ejemplo, ha provocado la mutación de muchos puntos de vista. Es curioso cómo, ante nuestros ojos, cambia totalmente la visión de las nociones primeras o la importancia de grandes teoremas. Lo que hasta no hace mucho era casi el punto de partida de una vía de investigación se transforma, a los ojos de una matemática renovada, en un corolario sin importancia o —suprema afrenta— en un simple ejercicio.

¿Cuál es, para el matemático, el estatuto de la *lógica,* cara a los filósofos? Un estatuto ambiguo y con diferentes niveles: según el sentido atribuido a la palabra lógica, ésta podría ser la matemática misma en sentido amplio, o la metamatemática con respecto a la matemática propiamente dicha, o, finalmente, el estudio de las estructuras algébrico-lógicas que conducen a diversas lógicas, como hay diversas geometrías. En todo caso, la lógica, *stricto sensu,* no parece que pueda ser constituida en una disciplina normativa exterior y anterior a la matemática, y no podría, como tal, ser fijada de una vez por todas. A decir verdad, se podría sostener que la matemática lleva en sí una lógica privilegiada más o menos explícita: en cada elección lógica posible, ella opta siempre por lo que es capaz de darle el máximo de poder y de fecundidad, sin menoscabo de su coherencia. Desde este punto de vista, la lógica intuicionista, ejercicio formalmente interesante, jamás ha podido ser una verdadera tentación para la matemática, puesto que limitaba sus medios, sin darle nada a ganar en compensación.

*

[194]

La actividad creadora del matemático en su trabajo es completamente diferente, si bien complementaria, de su actividad de comunicación. Expresión de ésta son las memorias, largas o breves, que él cincela con gran paciencia antes de publicarlas. De esa cadena y de esa trama están hechas nuestras matemáticas vivas.

Varias veces he hablado de estructuras matemáticas *interesantes*. ¿Cuál es la fuente de este interés, de este juicio de valor? En el inagotable juego de las estructuras matemáticas ¿a cuáles conviene atribuirles un interés particular, en un instante determinado de la aventura matemática? La respuesta a esta pregunta —y es lo que constituye su dificultad— no podría ser dada por consideraciones formales locales. En cada instante, ella resulta de una *perspectiva global* variable, en que entran en juego sea el consenso de la comunidad carnal de los matemáticos, sea la matemática constituida misma, sea la importancia de tal o cual aspecto de lo concreto.

La primera fuente de interés lleva al plano de la notoriedad a matemáticos poderosos pero no necesariamente muy originales. Sucede también que un determinado problema, considerado importante durante varios decenios por la comunidad de los matemáticos, logra finalmente una solución poco valiosa, y termina en algo que, para la inteligencia, es un verdadero callejón sin salida. Eso fue lo que ocurrió —no hace mucho— con el célebre quinto problema de Hilbert, concerniente a la caracterización mínima de los grupos de Lie. Lo resolvieron Gleason y Montgomery, que no esperaban tanto, por un método difícil, ciertamente, pero que parece no dar acceso a ningún campo nuevo. Sucede también, por el contrario, que un factor de moda llegue a ser un poderoso motor que haga surgir y madurar teorías enteramente nuevas, tal el álgebra homológica. Ocurre, finalmente, que un matemático solitario (ejs. Galois y Cantor) impone un punto de vista nuevo a la rebelde comunidad.

Las relaciones de las matemáticas con lo concreto, físico o social, dan origen a intercambios constantes. Las series y la integral de Fourier nacieron del análisis de las vibraciones; las distribuciones de Schwartz vienen de la mecánica cuántica, donde primero fueron halladas. Importa hacer notar que tales nociones, después de haber recibido el bautismo matemático, ya no guardan rastro alguno de su origen particular y adquieren la misma universalidad que aquellas que han nacido directamente de la matemática misma.

[195]

El intercambio en sentido inverso es, en nuestros días, aun más frecuente. La teoría de las matrices, nacida con Cayley, Hermite, etc. de preocupaciones puramente algebraicas, ha proporcionado su primer instrumento a la mecánica cuántica y ha invadido la técnica. La geometría riemanniana, creada por Riemann en el siglo pasado, sometida a una sabia elaboración en 1900 por Ricci y Levi-Civita, ha proporcionado a Einstein un cuadro perfectamente listo para acoger la relatividad general. La teoría de las representaciones de los grupos, procedente por línea lejana de Galois, de Lie y de Elie Cartan, nos sirve hoy, segun Wigner, para describir las partículas elementales conocidas o no conocidas aún.

A este respecto, importa hacer dos constataciones importantes.

La primera es el hecho de que el desarrollo de las matemáticas es concebido por los matemáticos como *autónomo*. La finalidad de la matemática no es la aplicación a lo concreto, no es proporcionar al conocimiento del mundo sensible instrumentos o modos de pensamiento. Un instrumento matemático no goza, en cuanto tal, de privilegio alguno por el hecho de haberse revelado útil en las ciencias de la naturaleza. Cualquiera que sea la fuente exterior de la "inspiración", una noción matemática debe en primer término justificarse ante sus hermanas, antes de adquirir el derecho de ciudadanía, y no se trata de una justificación concerniente al rigor, sino de una concerniente al interés. Es como libre juego del espíritu, sometido tan sólo a sus propias exigencias, como se concibe la matemática de ahora en adelante; desde este punto de vista, ella quiere ser ciencia fuera de la ciencia.

El comportamiento del matemático mismo, en el curso de su trabajo de investigación, es profundamente diferente del de los demás hombres de ciencia. En primer lugar, se consagra ampliamente a la soledad; innumerables horas de su vida las pasa solo, entregado al juego de los delicados mecanismos matemáticos que le es preciso dominar. Así, después de ímproba labor, puede llegar, en una determinada materia de investigación, a ese estado de saturación, de obsesión que bien conocemos y que es un estado casi esquizofrénico. Desde entonces, puede reflexionar sobre su asunto en toda circunstancia, puede trabajar realmente en medio de una multitud, en la plataforma de un autobús y aun —me atrevo a decirlo— en el curso de una conversación trivial con un interlocutor que lo aburre. Vive solitario diez o quince horas diarias, día tras día, en un universo matemático en que todo está simultáneamente presente, un universo en que los seres matemáticos en que él se interesa existen, a veces totalmente cargados de afectividad, pero en el cual no reinan aún las demostraciones compulsivas, que no vendrán sino después. Se habla mucho a sí mismo, pero su autodiscurso está en los antípodas con respecto al discurso matemático de comunicación,

[196]

y quiere ser portador y generador de intuiciones. Ese estado fatigante dura semanas y a veces no conduce a nada, o bien, en una hipótesis mejor, concluye en algo profundamente diferente de lo que se buscaba, algo que, sin embargo, es interesante y de que el matemático se apropia. Viene ahora la tercera etapa, la del trabajo paciente y ascético en vista de la publicación. La memoria, por lo general, no contendrá consideración alguna referente a los motivos de la investigación, al interés de su éxito, ni a la vida misma del espíritu que ha logrado esas proposiciones encadenadas unas a otras en buen orden y expresadas en un lenguaje formalizable. Como los libros de los anónimos españoles, esas proposiciones deben bastarse a sí mismas para que puedan obtener su justo lugar en el mundo del espíritu. El empleo de un lenguaje manifiestamente formalizable, y no explícitamente formal, es la única concesión del discurso matemático utilizado. Esos "abusos de lenguaje" hacen posible una economía del discurso, dan una base implícita a las intuiciones, y autorizan, para cada mensaje, un contenido de información más rico. Empero, al menor signo de equívoco posible, la formalización reaparecerá, o se hará más precisa.

La otra observación —y con ella deseo terminar— es la siguiente: es en la juventud de las ciencias cuando vemos predominar la acumulación de los hechos experimentales, la prudencia del método inductivo o de la abstracción generalizadora. Las matemáticas también pueden intervenir entonces, pero a título de *instrumento* procedente de fuera. Tal fue el estado por que pasaron ya las ciencias físicas, tal es el estado actual de la biología o de la economía.

Si, por el contrario, observamos los estados más evolucionados de la investigación, las cosas cambian totalmente de aspecto. La construcción de la dinámica newtoniana aparece como un primer ejemplo de lo que yo llamaría una *tentativa de deducción total.* La teoría de Maxwell, la teoría relativista de la gravitación o la teoría cuántica de los campos, proporcionan otros ejemplos de esas tentativas. Los creadores de tales teorías se sitúan de golpe en el dominio matemático, crean por el libre juego de su imaginación matemática los axiomas de una teoría, estudian sus consecuencias esenciales y comparan esas consecuencias con las leyes prudentemente inducidas de los hechos experimentales. Pueden los datos experimentales, en cierta medida, sugerir qué estructuras matemáticas conviene introducir o descartar; aseguran de manera estricta la comprobación final; pero no es de ellos de quienes depende, en última instancia, la aparición de una teoría nueva, sino de la riqueza creadora

[197]

de un espíritu matemático. De ahí ese aspecto de "cuasirrevelación" que presentan las más elaboradas teorías científicas: sus axiomas no se justifican nunca sino *a posteriori* y deben ser admitidos como las reglas del juego a que se entrega el hombre de ciencia. Aquí, las matemáticas no son ya meros utensilios, sino que suministran *el pensamiento mismo* del sabio. Una teoría científica auténtica no tiene dos sentidos: uno matemático, más o menos esotérico, y otro común. Sólo los modos matemáticos de pensamiento le son perfectamente adecuados, porque ellos son —me atreveré a decirlo— su carne y su sangre. Cuando uno examina la evolución de una ciencia y logra adentrarse hasta la voluntad secreta del sabio, se da cuenta de que la ambición asintótica fundamental es la creación de una teoría lo más total posible, la elaboración de un modelo matemático que asuma aproximativamente, pero de una manera cada vez más ajustada, una parte cada vez más grande de lo real. Esta ambición, comparable a la de Prometeo, data casi de los orígenes de la ciencia. Nos ha sido dado verla realizarse en algunos dominios privilegiados.

JEAN WAHL. — Muchas gracias. Cuando os preguntábais de qué manera reaccionarían los filósofos, parecíais a la vez temer y desear cierta violencia, pero vuestra ironía es a tal punto socrática que no creo que pueda haber violencia. Esta exposición nos ha parecido admirable y a mí me ha hecho recordar nuestros primeros encuentros, las conversaciones que aquí hemos tenido con León Brunschvicg, con Santillana.

Si alguien desea presentar algunas observaciones, me parece que sería bueno, ya que estamos en la Sociedad de Filosofía, ofrecer la palabra en primer lugar a los matemáticos.

BOULIGAND. — El Sr. Lichnerowicz ha terminado su hermosa exposición hablándonos de los modelos. Esa idea me ha guiado con frecuencia y es una de las que podré tratar con más facilidad.

Mirando así las cosas, un primer hecho puede servir de guía: la manera como Poincaré abordaba el problema de la invención matemática. Siguiendo a Leibniz, él apoya sus cálculos en las combinaciones de ideas y quiere retener las buenas combinaciones. Hacia ellas somos llevados —como lo recuerda Hadamard en su *Ensayo sobre la psicología de la invención matemática*— por el sentido estético. Este punto es importante. En efecto, si consideramos los dos tipos de actividades, comunicación y creación, debemos determinar, tanto respecto del uno como del otro, los niveles de precisión, a lo

[198]

largo de una escala adecuada. Un enunciado verificable se ofrece ya como un preámbulo estético, destinado a enriquecerse gradualmente en la síntesis que va a establecerse a diferentes niveles. Por ejemplo, cuando se trata de la comunicación en la enseñanza corriente, se habla de una manera perfectamente natural del nivel de los cursos de liceo —primer ciclo, segundo ciclo, clases terminales, clases preparatorias— e igualmente de los cursos de licenciatura, o aun de los de investigación. A partir del método psicofisiológico de referencia de Poincaré, se ha reconocido la importancia de los valores estéticos como guía eficaz en materia de combinaciones de ideas. En efecto, las buenas combinaciones se presentan al investigador que de repente recibe el choque de un impulso, seducido por un tema tan pronto como lo concibe. Tenemos ejemplos de este tipo de seducción. Después del inicial milagro griego, otro milagro se ha producido, ante nuestros propios ojos: la actividad de nuestros colegas de los liceos, que habiendo practicado fielmente y por largo tiempo un determinado sistema, han sentido después de la guerra los beneficios de un soplo imprevisto. He ahí un milagro producido por un ímpetu común, de tipo estético. Pues logra identificar lo que es simple y lo que es general. La generalidad hace entonces prevalecer los conjuntos y, con ellos, toda una matemática nueva, asimilable ya —guardadas todas las proporciones— para el Quinto y el Cuarto[1].

Cuando se analiza el impulso producido, se presiente una ley de tipo experimental. Se trata de una experiencia hecha por diferentes autores. Hace un momento, yo hablaba de niveles; pues bien, esos

[1] Alude a años de estudio del primer ciclo de los Liceos de Francia. Como se recordará, la ordenación numérica de los Cursos de la Educación Secundaria es allá inversa de la nuestra. *N. del T.*

autores han escrito a diferentes niveles. Ejemplo: Hermann Weyl, uno de cuyos libros, *La Simetría,* acaba de ser traducido a nuestra lengua. Ese libro era ya célebre en Norteamérica y en Europa, en todas las escuelas de matemáticas. Una cosa no puede pasar inadvertida: Weyl ha experimentado los mismos goces al escribir esa obra que al escribir largamente sobre otros temas: *Tiempo, espacio, materia, Los grupos y la física,* obras difíciles.

Otro ejemplo: Hadamard ha dado, sin más, un teorema que define las condiciones del máximum de un determinante. Y por ello ha experimentado una alegría de que da testimonio su libro citado hace un instante.

Concluyo. La intensidad de este impulso psicoestético no se mide por la extensión del texto nuevo: será menester, sin duda, introducir un término correctivo o atenuante; pero éste es a menudo[1] cosa mínima al lado de esa constancia que he querido poner de manifiesto.

[199]

HENRI CARTAN. — No es mucho lo que hay que agregar a las ideas tan numerosas, tan complejas que Lichnerowicz ha

[1] "A menudo" indica que yo doy principal importancia, en estas observaciones, a un "punto de partida". No he dado sino dos ejemplos; he omitido poner en parangón el caso de un influjo continuo, cuya acción perdura por un lapso tal o cual, influjo de *satisfacción estética,* y el caso de una *iluminación brillante.* Esas palabras muestran en grado suficiente el interés del problema sugerido por mis observaciones. Cuando uno reflexiona sobre el sistema de referencia psicofisiológico de Henri Poincaré, ve cómo la noche decisiva, que llega a ser tal después de "la taza de café", lleva al gran teorizador de las funciones y de los problemas funcionales a un alto grado de exaltación. La fulgurante iluminación que en ese instante le revela muchos secretos de un capítulo ignorado del análisis, va a reaparecer varias veces y a provocar en él ese estado mental que, en el campo de pronto estructurado —y sin embargo ramificable aún— que él explora, hace brotar chispas secundarias. Estas surgen súbitamente y en cascada (*Science et Méthode,* Primera parte, cap. III). Aquí, el fenómeno es de un tipo intermedio entre la iluminación fulminante y el influjo psicoestético de régimen más o menos continuo.

G. BOULIGAND

desarrollado de modo admirable. Me parece, no obstante, que tal vez hay un punto que ha quedado en la sombra y yo querría preguntarle qué piensa él al respecto: me refiero al papel del lenguaje en el desarrollo de las matemáticas. Como él ha dicho, los matemáticos tienden siempre a usar un discurso formalizable; pero, como él también lo ha dicho, la formalización completa es absolutamente imposible: sería ilegible, incomprensible. ¿Cómo superan los matemáticos esta dificultad? Lo hacen inventando, a cada instante, palabras nuevas para designar nociones nuevas, que pueden ser cada vez más complejas. Ocurre a veces que en el desarrollo de una teoría se llega a constituir una determinada noción cuya definición precisa exigiría páginas —tantas son las propiedades que en ella entran en juego—, y en seguida, de pronto, una vez reconocida la importancia que esa noción tiene, se le da un nombre, extraño para los profanos, porque es un nombre tomado del lenguaje corriente pero al cual el matemático le da un sentido muy preciso; por ejemplo, una escala, un haz...

LICHNEROWICZ.— O un tonel...

H. CARTAN.— Y la palabra queda así introducida. La teoría sigue desarrollándose; el nombre figura en el discurso; se comienza a conocer mejor sus propiedades, que por todos lados aparecen; y, cada vez más, queda de manifiesto que los matemáticos, con haber introducido una palabra, han creado, por decirlo así, un ser vivo; porque, poco a poco, se obtiene la experiencia de las reacciones de este ser matemático que se ha inventado. Y poco a poco este lenguaje llega a ser por sí mismo generador de intuiciones nuevas. Permite, sugiere problemas nuevos que ni siquiera se habrían podido formular en la lengua anterior; de suerte que, por haberse enriquecido el lenguaje, llega a ser posible plantear nuevos

[200]

problemas, y el matemático, para resolverlos, se ve obligado otra vez a enriquecer su lenguaje. He ahí un punto que, según mi opinión, tal vez merecía ser señalado.

Paso a otro punto secundario. Paradojalmente, se podría decir de grandes teoremas surgidos en el desarrollo de las matemáticas, de los más grandes teoremas, que su destino final es convertirse en axiomas. Eso parece un tanto paradojal; pero es que, cuando se ha llegado a comprobar la importancia de un resultado de un teorema y todas las consecuencias que él va a traer consigo en los dominios más diversos, el matemático ansía agotar hasta lo último todas las consecuencias posibles, y en el caso más general. Ahora bien, el teorema ha sido demostrado bajo ciertas hipótesis. Hagamos abstracción de todas esas hipótesis, erijamos el teorema en axioma, y veamos todas las consecuencias de este axioma. Históricamente este proceso ha jugado un papel importante en el desarrollo de las matemáticas. No daré más que un ejemplo: luego que Borel y Lebesgue demostraron el teorema que lleva sus nombres —a saber: que cuando se tiene un intervalo cerrado, limitado sobre la recta numérica, y cuando se le ha recubierto con una familia tal vez infinita de intervalos abiertos, es posible extraer de esa familia una familia finita de estos intervalos, la que ya, por sí sola, recubre el intervalo en su totalidad— se llegó a considerar propiedades análogas en ciertos espacios más generales, y de pronto ha sido introducida (creo que por Fréchet) la noción de espacio compacto. Se ha tomado finalmente como axioma el teorema de Borel-Lebesgue y, elevándose a mayor generalidad, se van a estudiar de una manera sistemática los espacios en los cuales el teorema de Borel-Lebesgue —demostrado en el caso de un intervalo— es verdadero; se van a extraer todas sus consecuencias y se va a llegar así a la teoría de los espacios compactos. Yo pienso que también este aspecto merece ser considerado.

L i c h n e r o w i c z . — Quiero dar las gracias al Sr. Henri Cartan, que ha completado lo que mi exposición tenía de demasiado fragmentaria, en dos puntos sumamente importantes. En particular, ese lenguaje formalizable en derecho, pero no formalizado; en efecto, él comporta, esencialmente, el hecho de obrar un poco a la manera de Dios Padre, y de dar nombres a nuestros seres a medida que los vamos encontrando.

BÉNÉZÉ. — Habéis hablado como matemático y os lo agradezco. Eso me va a permitir hablar como filósofo. En lo que concierne a vuestro prospecto, debo decir que estoy enteramente de acuerdo respecto de la creación. No es posible, en efecto, no estar de acuerdo en ese punto, en matemáticas como en todas las demás ciencias, haciendo, naturalmente, las transposiciones necesarias.

[201]

En lo tocante a la comunicación, habría quizá algunos puntos delicados. Hay que decir, en primer término, que si la soledad del matemático es un hecho cierto —así lo habéis expresado—, la del filósofo no lo es menos: también nosotros empleamos quince o veinte horas del día en determinar lo que debemos pensar; sólo que no pensamos de la misma manera. Pues, si la matemática está fuertemente anclada en nuestros espíritus y desde hace mucho tiempo, si ella constituye en nuestra enseñanza una organización muy sólida, no sólo en su doctrina, sino también en el contenido enseñado, lo mismo ocurre con la filosofía, tan antigua como ella a lo menos. Es, pues, natural que ese paralelismo entre las dos intervenga, ya como posibilidad de colaboración, ya como posibilidad, digamos, de alejamiento. Es ese alejamiento el que me interesa.

LICHNEROWICZ. — O esa posibilidad.

BÉNÉZÉ. — Digamos alejamiento; no hay conflicto: todos estamos de acuerdo para buscar el acuerdo. Sólo que, en una discusión, sobre todo de este género, lo que hay de más interesante son los puntos de desacuerdo. Y es menester ponerlos en plena evidencia, a fin de poder remontar a un punto común. Pido excusas por estas generalidades; pero son necesarias. Voy a precisarlas, por lo demás.

La filosofía se nos presenta a nosotros en general, como poseedora de un derecho de inspección sobre todo lo que ocurre en el espíritu humano.

JEAN WAHL. — En cuanto filósofo, protesto contra eso. No tenemos mayor derecho de inspección que el matemático con respecto a la filosofía.

BÉNÉZÉ. — Tenéis toda la razón, Sr. Presidente. Agregaré que, por lo demás, es ella misma quien decidirá respecto de los puntos que no le conciernen; de suerte que el filósofo —no hablemos de derecho de inspección, si la palabra os parece demasiado precisa— se detendrá por propia decisión ante ciertos muros que él se prohibirá atravesar, porque sabrá que ello es imposible.

Pero ahora me pregunto si la matemática forma parte de ese más allá que el filósofo no tiene derecho a criticar, no ya como matemático sino como filósofo. Pues sé muy bien lo que ocurre cuando uno de nosotros, filósofo deseoso de completar su educación, di-

[202]

gamos, de filósofo, va hacia los matemáticos, y les pide algún procedimiento maravilloso que le permita elevar la dignidad de sus conocimientos. En tales ocasiones, vosotros nos acogéis, algunos con bondad, los otros —quizá los más— con cierto escepticismo. Y a la postre, después de haber perseverado durante uno, dos o más años, ya que el asunto no tiene término —quien ha comenzado a cultivar las matemáticas y se ha interesado en ellas, no puede ya detenerse— ¿qué pasa al volver al seno de los nuestros? O bien ellos consideran que, sin que hayamos perdido el tiempo, no es mucho el que hemos ganado, y entonces el filósofo vuelve a la filosofía que podríamos llamar tradicional, pues sabe, o supone, que lo que creyó haber aprendido de nada le servirá como filósofo; o bien, él vuelve persuadido por sus profesores de matemáticas, no sólo de la verdad matemática, sino, lo que es más grave —y a esto me referí al hablar de "alejamiento"— también de que las reflexiones puramente filosóficas que han intervenido en su enseñanza matemática van a servirle a él en cuanto filósofo, y como artillería para bombardear a la filosofía tradicional. Es aquí donde yo me pregunto si el filósofo no ha de intervenir.

En otros términos, la cuestión precisa es ésta: ¿acaso las matemáticas, por el solo hecho de ser matemáticas, por su disciplina, su progreso, su poder, sus maravillas —me atrevo a decir que el cálculo diferencial e integral es la octava maravilla del mundo—, bastan a los matemáticos para saber qué ocurre cuando se trata de matemáticas? Hay en vuestra exposición ciertas expresiones que me permiten creer lo contrario...

L I C H N E R O W I C Z. — Yo he sido filósofo.

B É N É Z É. — Lo contrario: nosotros los filósofos tal vez necesitamos, para comprender las matemáticas, de una teoría del conocimiento que, de buenas a primeras, no se apoye en las matemáticas. En otros términos, según mi opinión, de algo carecerían los matemáticos cuando reflexionan, cuando quieren reflexionar como filósofos sobre su ciencia; desde el comienzo, les falta una teoría de lo real, y doy a la palabra "real" la plenitud de su sentido. Lord Russell dijo —según creo— que las matemáticas eran un conjunto de cosas respecto de las cuales no se sabía bien qué significan, a pesar de que se sabía lo que de ellas había que decir. He ahí algo contra lo cual yo me sublevo, por así decirlo. Termino con esta parte cimera del debate, en forma que puede parecer un poco general.

[203]

L I C H N E R O W I C Z . — Pienso que habéis estilizado muy bien el diálogo de un matemático que se entregara al juego de no ser sino eso, con un filósofo, disfrazado de filósofo, me permitiré decirlo. Mi respuesta será una pregunta: si pensáis que el filósofo tiene un derecho de inspección, un derecho normativo, sobre todo lo que ocurre en el espíritu ¿qué tipo de autonomía nos concedéis a nosotros? En segundo lugar, "ser filósofo" . . . , probablemente no es un oficio ser filósofo; la actividad filosófica no debe serle prohibida al matemático con respecto a sus propias matemáticas.

B É N É Z É . — Muy rápidamente contestaré lo relativo a la autonomía que me pedís otorge al matemático. Estamos, sin duda, en presencia de un conflicto entre el hombre de ciencia, en cuanto hombre de ciencia naturalmente —pues en cuanto hombre también él piensa en todo— y el filósofo. Habiendo elegido cada hombre de ciencia un sector de la naturaleza en el cual ejercerá su actividad de tal, comienza por establecer ciertos postulados, digamos, de existencia, de significación, que son otros tantos supuestos sobre los cuales ya no se volverá. Por ejemplo, el aritmético pide que se le dé por aceptada la serie llamada natural de los números enteros, a partir de lo cual hará maravillas, y, efectivamente, las hace. Pues bien, según mi opinión, el filósofo se ocupa, no ya de lo que resulta de los supuestos, sino de estos mismos, de todo lo que a ellos concierne, y, por lo tanto, si rehusa dar por aceptada la serie numérica, no lo hace por puro gusto, sino para ver qué ocurrirá; en tanto que si eso se le rehusa al hombre de ciencia, éste quedará como paralizado.

L I C H N E R O W I C Z . — Yo temo, sobre todo, que no ocurra nada . . . Lo que tal vez no he señalado bien en mi exposición es que la actividad matemática consiste en primer lugar en comenzar aquí o allá: yo he comenzado arbitrariamente con la teoría de los conjuntos. Realizado el primer acto de una actividad matemática, en seguida se ascenderá y se descenderá, o sea, se remontará hacia la fuente y se bajará en el sentido de la corriente.

BÉNÉZÉ. — No otra cosa quería yo decir.

LICHNEROWICZ. — Si es así, pienso que llegaremos a un acuerdo bastante amplio.

BÉNÉZÉ. — Daré un ejemplo preciso: el de Descartes. Cuando un matemático habla de Descartes, habla de él como del inventor, el iniciador de la geometría analítica y de la mecánica o, más

[204]

bien, de la doctrina llamada mecanicismo. Pues bien, con asombro he notado que ninguno habla del *cogito,* el cual, sin embargo, desde el punto de vista filosófico, aparece como lo esencial del desarrollo.

JEAN WAHL. — Me permito recordaros que el Sr. Lichnerowicz conoce muy bien el *cogito.*

LICHNEROWICZ. — A propósito de esto, pienso que todo matemático es quizá, sin que lo deje ver, hijo de Epiménides*, el

*Epiménides de Cnossa (hacia 600 a. J. C.), personaje histórico, pero cuya biografía es casi totalmente legendaria. Plutarco dice de él: "se le creía caro a los dioses y sabio en materias divinas, con una sabiduría entusiasta de iniciado". Gozó de gran fama, sobre todo como experto en métodos catárticos o de purificación, práctica secular entre los sabios de Creta. Es a esto, sin duda, a lo que alude el profesor Lichnerowicz, puesto que la matemática desempeña, en el orden del pensamiento, una función esencialmente depuradora: ella excluye del ámbito científico todo lo que es arbitrario, subjetivo, vago.

Para mayor información sobre Epiménides: ARISTÓTELES, *Constitución de Atenas,* I; DIÓGENES LAERCIO, libro I (hacia el final); PLUTARCO, *Vida de Solón,* XIX; ERWIN ROHDE, *Psyché,* pp. 341-4 de la trad. francesa, París, Payot, 1928; P. M. SCHUHL, *Essai sur la formation de la pensée grecque,* pp. 243-4, París, Alcan, 1934. *N. del T.*

Cretense. Diré que en ciertos aspectos del *cogito* hay un lado "Epiménides" que revela en Descartes a la vez a un filósofo y un matemático.

BÉNÉZÉ. — Perfectamente; eso sí que la rama matemática no se identifica con la rama filosófica.

He aquí tres preguntas precisas que yo deseaba formular y que, estoy seguro, podréis responder brevemente. La 1ª es sobre el teorema de Gödel: querría conocer vuestra opinión, si bien creo que muy rápidamente vamos a estar de acuerdo. La 2ª se refiere a un problema más preciso: ¿estáis de acuerdo con los matemáticos que nos dan la llamada curva de Peano como capaz de agotar una superficie multiplicando sus meandros? ¿Creéis que una línea sea simplemente el conjunto de sus puntos? La 3ª es una cuestión filosófica, que aparece en Husserl, p. ej. —según mi opinión, es un fracaso. ¿Estaríais de acuerdo en asociar la lógica *stricto sensu,* la lógica formal, con la lógica llamada trascendental, es decir, con la lógica del conocimiento? ¿Aceptaríais incluir en la misma lista el principio de contradicción y, por ejemplo, el principio de la pureza espacial que estaría en el origen de la geometría?

LICHNEROWICZ. — En cuanto a lo primero, el teorema de Gödel, las cosas son claras: bajo un aspecto negativo, muestra que ningún discurso puede hallar en sí mismo su propia justificación; positivamente, es un llamado (en la medida en que de éste se necesita) a las sucesivas metamatemáticas posibles. El teorema suministra un tipo de respuesta bastante irónico y epimenídeo, que pone de relieve el carácter de ciertas grandes cuestiones sobre los

[205]

fundamentos de las matemáticas. En lo concerniente a la curva de Peano, comprendo relativamente mal la pregunta, en el sentido de que no tengo creencia en materia de curva o no-curva: para mí, en efecto, una curva es una línea idéntica al conjunto de sus puntos.

No me parece que esta cuestión plantee problemas filosóficos. Mucho más difícil me es contestar en forma breve la tercera pregunta. Yo he hablado del tipo de lógica del discurso sin equívoco, sin malentendido. Si yo mismo llegara a ser filósofo, no tendría ni en lo más mínimo como injurioso el considerar una de las partes del dominio de la filosofía como el estudio de un tipo de discurso en el cual hay necesariamente malentendido: este malentendido inevitable puede ser muy interesante y muy fecundo.

Srta. S. Bachelard. — Quisiera hacer una pregunta muy precisa al Sr. Lichnerowicz, quien ha dicho en su exposición que la actividad de comunicación matemática estaba exenta de todo ruido de fondo. ¿Cómo es eso posible?

Lichnerowicz. — Yo dije: "prácticamente desprovista de ruido de fondo". En esto hay una paradoja bastante divertida. Si consideráis los estudios de base matemática que hacen los especialistas de la teoría de la información, constataréis que ellos demuestran que todo mensaje tiene un "ruido de fondo", es decir, contiene una parte aleatoria en la significación comunicada. Ahora bien, la matemática querría, o quiere, para sí, un lenguaje sin ruido de fondo. ¿En qué radicaría esta posibilidad? Yo pienso que, de hecho, ella depende justamente de la consideración posible de las metamatemáticas sucesivas. La demostración hecha por los matemáticos de la información es válida dado cierto punto de partida, con un determinado origen para la matemática. En la medida en que uno se apoya en las metamatemáticas anteriores, queda perfectamente a la vista que la demostración ya no es válida, o, dicho en otros términos, que el ruido de fondo no es prácticamente nulo pero puede ser reducido arbitrariamente. Tal es la respuesta, algo técnica, que yo doy a vuestra interesante pregunta.

Roger Martin. — Según lo que se ha dicho, la lógica se confunde sea con la matemática tomada en su conjunto —y se trata entonces de una definición muy amplia y poco usual de la lógica— sea, en un sentido más restringido, con la teoría algebraica de las estructuras lógicas. Mas, la lógica por excelencia ¿no sería más bien la metamatemática destinada a probar por métodos matemáticos la coherencia de lo que se llama tradicionalmente las matemáticas?

[206]
LICHNEROWICZ. — No está destinada sólo a eso.

R. MARTIN. — El problema no está ahí. Habéis dicho al terminar: "en todo caso, no parece que esta lógica pueda ser exterior o anterior a las matemáticas". En eso estoy de acuerdo. Querría sólo hacer notar que para reflexionar de manera matemática sobre las matemáticas —lo que es, ciertamente, el trabajo del lógico— no es necesario utilizar la totalidad de las matemáticas o recurrir a sus teorías más refinadas, justamente las que más pronto evolucionan. De hecho, la metamatemática, por lo menos la de Hilbert y la que más corrientemente se practica, se sitúa en un nivel muy elemental, el de un ser que sabe, como dice Bourbaki, "leer, escribir y contar" —¡con lo que eso implica en el espíritu de Bourbaki!—. Yo me pregunto entonces si, no obstante mantener el concepto de que la lógica no puede ser fijada de una vez por todas bajo tal o cual forma, no se debe reconocer la existencia de una región estable que sería la de la matemática finitista. Seguramente, me vais a responder que no se sabe por dónde pasa la frontera del finitismo, y yo os concedo desde luego las reservas que suscita toda definición estricta del finitismo. Sin embargo, tal vez existe a pesar de todo, en las matemáticas, una estabilidad *de hecho,* que basta para desarrollar, digamos, una buena parte del cálculo de las proposiciones y hasta de los predicados. De suerte que no se engaña a nadie si se dice que la lógica por excelencia se confunde con esa parte estable y segura de las matemáticas. ¿Qué pensáis al respecto?

LICHNEROWICZ. — Creo que de buena gana yo estaría completamente de acuerdo en eso: pienso que ni el matemático ni el lógico "engañan a su gente". Lo que ellos quieren es justamente lo contrario. Que haya una estabilidad de hecho, no una fijeza, sino una estabilidad del ámbito de interés, eso, en la perspectiva histórica del futuro inmediato, parece ser verdadero. Estoy muy lejos de saber si eso es verdadero en derecho. También ignoro absolutamente lo que será nuestra matemática de aquí a un siglo, y si no planteará a la lógica matemática problemas nuevos. Todo eso va a evolucionar, ciertamente, con menos rapidez que ciertos dominios de la matemática; pienso, no obstante, que el simple hecho, por ejemplo, de la irrupción de la categoría en el dominio de las matemáticas, si bien no parece plantear un problema inmediato a la lógica, muestra que pueden surgir situaciones matemáticas que obliguen a la lógica a nuevos desarrollos.

[207]

R. MARTIN. — ¿Creéis que la irrupción de la noción de categoría en este dominio se traducirá en una modificación de la armadura lógica fundamental —cálculo de las proposiciones, cálculo de los predicados—, o que la modificación intervendrá sólo al nivel de la axiomatización y no al de la lógica subyacente?

LICHNEROWICZ. — Yo apostaría al segundo término de la alternativa que acabáis de indicar, pero por englobamiento.

R. MARTIN. — Si de englobamiento se trata, nada impide considerar como la lógica por excelencia la parte antigua englobada.

LICHNEROWICZ. — Sobre ese punto, yo creo, sin embargo, que es preciso conservar, en derecho, la apertura lógica.

H. CARTAN.— Me desconcierta mucho ver a Martin restringir de antemano la expansión posible de la lógica. La lógica, no menos que las matemáticas, está en devenir y no sabemos lo que llegará a ser. Un ejemplo muy reciente, la demostración de Cohen, muestra que en lógica se llega a utilizar regiones hasta aquí desconocidas, para demostrar de nuevo un teorema matemático, y que todo desarrollo de las matemáticas trae consigo un nuevo desarrollo de la lógica y *vice versa.* A mí me parece que, tal como en matemáticas, la zona de expansión de la lógica es absolutamente imprevisible.

LICHNEROWICZ.— Personalmente, veo el asunto del mismo modo que tú, pero puede ser que ello se deba a una reacción psicosociológica de matemático.

R. MARTIN.— Podría decirse, usando un argumento que Bourbaki emplea a propósito de la aptitud de las matemáticas para corregir sus errores, que desde hace veinte siglos la lógica elemental de las matemáticas clásicas casi no ha variado.

LICHNEROWICZ.— También hay cosas en matemáticas que desde hace veinte siglos no se habían movido y que ahora se están moviendo. Mantener en derecho —y también de hecho, de ello estoy persuadido— la expansión de una lógica vinculada a la matemática, es absolutamente necesario.

[208]

POIRIER.— La cuestión de saber si el arte debe desarrollarse para sí mismo es resuelta por lo general afirmativamente: no se piensa que el arte deba ser catequético, comprometido, demostrativo o que deba alcanzar la verdad. Por el contrario, hay quienes creen que un arte que no fuese ni en lo más mínimo figurativo correría el riesgo de llegar a ser muy arbitrario y muy vano, y de esclerosarse, y que, dadas esas condiciones, la libertad del arte no es quizá, del todo, la libertad de no figurar nada. Pero esto no tiene importancia.

Lo que yo querría pedir al Sr. Lichnerowicz es que nos dé algunas aclaraciones sobre el pasaje tan sugestivo, tan interesante que ha consagrado a ese libre juego del espíritu del matemático en el momento en que inventa, en que crea. Al hablarnos de ese estado de obsesión esquizofrénica, de monoideismo, de idea fija, nos ha mostrado al matemático viviendo por largos períodos en una especie de universo propiamente matemático, y que, sin embargo, no sería el universo matemático formalizado, de la demostración, de la comunicación, de la reconstrucción lógica, y que, no obstante, tampoco sería el viejo universo intuitivo, en que hay figuras, en que hay gestos, en que hay aplicaciones. ¿Podríais decirnos algunas palabras sobre ese universo tan singular y tan esencial?

L I C H N E R O W I C Z. — En efecto, es un universo singular y, en el fondo, como el universo místico, bastante difícil de describir cuando no se le ha experimentado. Habéis caracterizado muy bien los dos rasgos: es un universo que todavía no es del dominio demostrativo. Es un paréntesis dentro del modo que habéis usado para aproximaros —por medio de lecturas, de una primera reflexión pluma en mano, y de ensayos de demostración— a un dominio de investigación determinado. Y todavía no habéis llegado a un resultado, y os encontráis en ese estado intermedio en el seno de un mundo mental en que, a diferencia de lo que son en derecho los seres matemáticos carentes de estatuto priviligiado, ellos tienen nombres, están vinculados afectivamente a nosotros mismos: tienen un contenido ontológico. Y sois capaz de soñar en torno y de saber, a partir del momento en que distinguís la menor relación nueva, la más mínima propiedad, sin demostración alguna y con un conocimiento no seguro pero muy rápido, las consecuencias en un dominio de cadenas lógicas extremadamente lejano, y que mucho os costará en seguida poner a punto. Mas, apenas hayáis logrado cierta aproximación, adquiriréis un sentimiento de certeza, que puede ser engañoso, pero que os hará recorrer a grandes zancadas una inmensa cadena lógica que luego tendréis que examinar de

[209]

nuevo para ver la consecuencia. Y es este aspecto el que yo llamo "el universo matemático" en el momento en que todo está simultáneamente presente: no hay ahí un orden lineal. Es una vivencia bastante singular, y yo creo que tal es la experiencia práctica de todo matemático cuando trabaja.

JEAN WAHL.— Yo querría presentar una faz de la cuestión a la cual creo que el Sr. Lichnerowicz ha aludido solamente. Lo que voy a decir surgió en mí al leer un antiguo comentario a la *Crítica de la Razón pura*. En ese comentario, Vaihinger dice que Kant ha confundido dos cuestiones: la naturaleza de la matemática y la aplicación de las matemáticas al mundo físico. Y al releer a Kant teniendo presente esa idea de Vaihinger, me he dicho que, efectivamente, Vaihinger tiene razón, y que los dos problemas deben ser separados. Hoy hemos oído hablar de las matemáticas, de la naturaleza misma de las matemáticas; queda, sin embargo, una cuestión que es casi necesaria, que por fuerza se plantea al espíritu: ¿cómo se explica que esos ensueños hallen aplicaciones en el mundo real? ¿hay algo en el mundo real que responda a los ensueños o a las exigencias del espíritu?

LICHNEROWICZ.— Creo, en efecto, que es absolutamente esencial la distinción de los dos problemas que la matemática plantea. La actividad matemática misma, este libre juego, es una cosa completamente distinta de la manera como ella es utilizada para la comprensión del universo sensible. Yo deseaba abordar el segundo problema, pero eso habría tomado demasiado tiempo. Diré tan sólo, en forma sumaria, y de conformidad con mi conclusión, que, para mí, no hay armonía preestablecida. La matemática nos instruye sobre el funcionamiento mismo de nuestro espíritu, y no llegamos a comprender algo de este mundo del universo sensible, sobre este mundo que, por lo demás, fabricamos en parte con nuestra inteligencia matemática y con los actos que esta inteligencia matemática misma guía, sino porque somos incapaces de comprender otra cosa.

JEAN WAHL.— La solución que nos proponéis es la solución kantiana.

LICHNEROWICZ.— Es la solución kantiana, pero de buena gana yo la tomaría en un aspecto de intercomunicación. Creo que el lenguaje matemático es el único que nos da una posibilidad

[210]

de comunicación *objetiva,* en el sentido de que sólo él permite que con exactitud casi completa nos comprendamos los unos a los otros. Existe un dominio que en cierta medida —por eso la pregunta que hace un momento formuló la Srta. Bachelard me pareció particularmente interesante— escapa al dominio del equívoco.

JEAN WAHL.— Sí, a condición de ser matemático.

LICHNEROWICZ.— Pero, si la verdad es que, así como todos somos filósofos, todos somos matemáticos. Cuando extendemos nuestros cheques, cuando hacemos nuestras declaraciones de impuestos, operaciones extremadamente vulgares, por lo general no hay ruido de fondo. Existe un dominio de la comunicación en que emitimos —voy a usar un lenguaje muy "información"— un conjunto de señales que llama en respuesta un conjunto de señales perfectamente unívoco o muy próximo a un isomorfismo. En otros dominios, las señales respuestas no pueden encontrarse sino en una banda estrecha. Tenemos una intercomunicación *aproximadamente* correcta. El punto de vista "información" es uno de los que permitirían, según me parece, comprender mejor cómo se constituye una ciencia.

MOULOUD. — Me ha interesado mucho vuestra exposición, que nos ha mostrado las diversas direcciones de la actividad matemática. Al leer el resumen anticipado de la conferencia, me habían llamado la atención las polaridades. La actividad matemática estaría dirigida, ya hacia las aplicaciones, los objetos, ya hacia el perfeccionamiento de las formas, que sería su aspecto más estético. Y también, ella se propone, ora la exactitud lógica, que permite la comunicación, ora la creación de nuevos seres. En el fondo, yo querría plantear algunas cuestiones sobre los límites y sobre los vínculos de esas diferentes actividades.

Así, la creación es inspirada, por un lado, por los aspectos del mundo exterior, por otro, por una exigencia interna de perfección. Yo me preguntaba sobre la manera cómo esas actividades se unen. Su mayor desacuerdo aparece cuando se oponen el estatuto propiamente experimental de los objetos y la existencia ideal de los seres matemáticos. Pero me pregunto si la oposición no se atenúa al límite cuando se examina en su interioridad el trabajo del matemático, que desarrolla las posibilidades formales de los seres que él ha tomado primeramente en modelos casi intuitivos. Al comienzo de

[211]

la historia de la doctrina de los grupos, por ejemplo, se ha reflexionado sobre ciertas propiedades que estaban presentes en los números, en las colecciones permutables; han interesado esas propiedades relativamente concretas. Después, la doctrina ha sido desarrollada por sí misma y se han construido las leyes más formales de las estructuras algebraicas. También se ha pasado a las aplicaciones, que tenían un interés práctico pero además un interés teórico: ellas surgían del propio formalismo, y lanzaban a los matemáticos a nuevas reflexiones: es el dominio de los vectores, de los tensores, de las matrices. Cuando se habla de las orientaciones más prácticas o más estéticas del trabajo del matemático, ello no impide, sin duda, que el movimiento hacia lo exterior y el movimiento hacia lo interior lleguen a coincidir, al nivel en que las nociones matemáticas progresan.

Pero la observación que yo quería hacer concierne sobre todo a la dualidad de funciones que el matemático da a su lenguaje: éste tiene un papel de comunicación y también uno de creación. Yo tenía la idea de que las matemáticas modernas tienden más bien a aproximar esas dos funciones. Pienso, por ejemplo, en el uso de los procedimientos de la extensión, de la adjunción en álgebra. Ellos establecen sin duda una correspondencia sin equívocos entre conjuntos: el conjunto más grande presenta leyes de composición, de ordenación, que pueden ser aplicadas al más pequeño. Es un método lógicamente exacto, en tanto que el principio de permanencia de Hankel, que era como una anticipación de ese método, era intuitivo, impreciso. Pero es también un método de invención: permite crear estructuras nuevas, más ricas, sobre la base de las estructuras que ya se conocían. Sirve también para hallar nuevas propiedades, nuevos teoremas sobre los seres que se incluyen en esas estructuras más complejas: hay teoremas sobre los polinomios que se demuestran sirviéndose del cuerpo de sus cuocientes racionales, o bien se hacen reductibles las ecuaciones con coeficientes racionales adjuntándoles elementos tomados de entre los números reales y complejos. Parece que hay vínculos entre creación, verificación, comunicación, que aparecen más claros en las matemáticas modernas que en las matemáticas antiguas, en las cuales el vínculo de los métodos era más confuso: se veían con menor nitidez las diferencias y las relaciones.

He ahí cuestiones que yo me planteaba sobre las polaridades del pensamiento matemático, sobre las razones exteriores e interiores de la invención, sobre los objetivos lógicos y heurísticos que tiene en vista el matemático. Pero creo que el Sr. Lichnerowicz ha respondido de antemano, en lo esencial, a esas cuestiones: después, al seguir la exposición que nos ha hecho, he visto que había un movimiento del pensamiento matemático entre los polos de su actividad.

[212]

L I C H N E R O W I C Z . — Creo que todos los matemáticos presentes estarán de acuerdo con el análisis que habéis hecho; en efecto, creación y comunicación son, en determinado momento, en un hombre determinado, dos tiempos de su actividad; la palabra polo es menos aplicable a la situación actual, se aplicaba mejor en el pasado, en que todo eso era algo bastante confuso y revuelto. Ahora existe un estatuto claro, según me parece.

R . P . D U B A R L E . — No puedo sino dar mi aprobación a lo que el Sr. Lichnerowicz ha dicho.

En lo que concierne a la lógica, tengo el sentimiento, muy de acuerdo con Martin, por una parte, de que el pequeño saber de la lógica matemática quedará como una conquista para la matemática. Me es muy difícil concebir una matemática que abandonara el antiguo precepto de no contradecirse en su discurso; una matemática que aboliera la necesidad de ser consecuente con las tesis afirmadas, por todo el tiempo durante el cual se las mantenga; y vería muy mal una matemática que no tuviera como norma de esa comunicación sin ruido de fondo de que el Sr. Lichnerowicz nos ha hablado, la obligación de asignar notaciones distintas a todas las cosas diferentes. Y me parece que mientras eso sea respetado, cierto tipo de lógica inalienable se mantendrá. Por otra parte, estaría igualmente de acuerdo con lo dicho por el Sr. Cartan, en el sentido de pensar que tal vez no hemos llegado al término de la lógica, y que hay efectivamente en nuestro pensamiento procedimientos que la lógica no ha esclarecido aún. La lógica podría ampliar sus estructuras, hacer extensión de ellas, en el sentido matemático, lo que permitiría quizá resolver bien cierto número de cuestiones pendientes. No creo que eso pueda hacerse *a priori*. Pero el pensamiento matemático es una especie de aventura, que de tiempo en tiempo encuentra problemas. A la luz de esos problemas, él puede efectivamente considerar salidas lógicas, que no se imponían en otro tiempo y que, porque no se imponían, no eran perceptibles.

¿En qué situación nos hallamos ahora en lo tocante a la comunicación sin ruido de fondo? Debo declarar que sobre este punto soy muy pesimista. Pienso que es extraordinariamente escasa la verdadera matemática que esté totalmente exenta de ruido de fondo. Personalmente, iría hasta la tesis extrema, algo provocativa natu-

[213]

ralmente, de que la única matemática sin ruido de fondo que yo conozco, es, en cuanto a la lógica, la lógica proposicional de tipo estrictamente clásico, de dos valores, y ni siquiera incluiría el cálculo funcional del primer orden, y en cuanto a la matemática misma, el álgebra de los conjuntos finitos. Es evidente que no aceptar sino eso es un ayuno terrible para la inteligencia. Sé muy bien que si la inteligencia quisiera embriagarse en esa especie de ayuno, no iría lejos. En consecuencia, es una de las funciones de la matemática aceptar una parte de sí misma, consciente o inconscientemente portadora de cierto número de ruidos de fondo, y en seguida, poco a poco, trabajar con el fin de eliminarlos. Lo innegable, según parece, es que el trabajo intelectual de eliminar el menor ruido de fondo es una de las cosas más difíciles. Es mucho más fácil, creo yo, continuar un discurso tolerando los ruidos de fondo de la tribu que tratar de eliminar ciertas fuentes originarias de esos ruidos de fondo tan luego como éstos han sido percibidos. Hay numerosos matemáticos que prosiguen su labor sin preocuparse del asunto, y que hacen muy buenas matemáticas, mucho mejores, por cierto, que lo que hace un lógico que se esteriliza a causa de esa especie de ascesis y que no tiene necesariamente, por el hecho de ser lógico, un muy notable poder de creación. Así, pues, yo de buena gana creería que, para el matemático, el ideal es el pensamiento sin ruido de fondo; y que, por ahora, debe procurar acercarse a él lo más posible, dando en ciertos casos un modelo casi definitivo o, por lo menos, un ejemplo elemental, que puede servir de información para la mente anhelosa de ir más allá. ¿Hasta qué punto será posible ulteriormente eliminar de nuestros pensamientos ciertos ruidos de fondo? En cuanto a mí, creo que cada vez que el infinito entra en escena, no hemos realizado aún en grado suficiente esas operaciones, y que los inconvenientes provienen de nuestra propia matemática.

LICHNEROWICZ.— Estamos en perfecto acuerdo. En verdad, esforzarse en eliminar los ruidos de fondo es también una tarea de la más alta importancia.

J. MERLEAU-PONTY.—Yo vuelvo a la cuestión planteada por el Sr. Wahl; no estoy seguro de comprender plenamente la convergencia de dos partes del desarrollo del Sr. Lichnerowicz. Hacia el promedio de su exposición, él nos ha dicho que las matemáticas se desarrollan de una manera perfectamente autónoma, hasta ha hablado de ciencia fuera de la ciencia. Y en su conclusión

[214]

nos dice que el matemático tiene una especie de ambición, que ha llamado "prometeica", y nos ha hecho pensar que en un estado suficientemente avanzado de la ciencia —sugiere que prácticamente la física ha llegado a él— la palabra creadora, fundadora, pertenece al matemático. ¿Hay en eso completa coherencia?

LICHNEROWICZ.— Presento mis excusas: tal vez, sobre un punto, no he sabido hacerme comprender bien. He hablado, efectivamente, de ciencia fuera de la ciencia, pero cuando he hablado de ambición prometeica, me he referido al físico en acción y no al matemático. Es el gran físico teórico quien aspira a aquel fin. Yo realmente dije que el medio, el que servía para crear nuevas teorías, era el pensamiento matemático, el cual, en ese momento, por cierto, ya no era autónomo: su objetivo era forjar un modelo matemático de cierta clase de fenómenos concretos.

J. MERLEAU-PONTY. — Hay, sin embargo, un esfuerzo de interpretación de la experiencia, que tal vez es diferente del de la creación puramente matemática.

LICHNEROWICZ. — Ciertamente, por su inspiración misma, es diferente de la creación puramente matemática. No cabe duda; pero no es fundamentalmente diferente en cuanto a cierto punto: se imagina a menudo que es lo concreto, más o menos esterilizado, lo que os inspira. El tipo de inspiración que ha menester el físico teórico se asemeja mucho al tipo de inspiración que ha menester el matemático; pero uno, por lo general, quiere llenar el dominio de una teoría con ideas y problemas propiamente matemáticos, mientras que el otro se propone dar cuenta de una extensa clase de lo concreto. Sin embargo, existe entre ellos todo un espectro continuo de sabios, todos teorizadores de lo concreto, espectro que va desde el matemático casi puro hasta el físico manipulador de grandes ordenadores y en contacto con aceleradores de partículas.

ROBINET. — Habéis escrito: "la matemática extrae su poder de su carácter no-ontológico". Ahora bien, los autores que yo frecuento, Leibniz, por ejemplo, pretenden que el poder de las matemáticas viene precisamente de su carácter ontológico. La pregunta que yo quisiera haceros es ésta: ¿Leibniz es, según vuestra opinión, un matemático?

[215]

LICHNEROWICZ. — Leibniz es para mí un matemático, y uno de los más grandes matemáticos. Pero pienso que la reflexión filosófica, en la época de Leibniz mismo, no había tomado conciencia de lo que es verdaderamente la actividad matemática. No hay homogeneidad, a través del tiempo, entre las matemáticas y la concepción que las matemáticas tienen sobre ellas mismas. No creo que se pueda invocar el testimonio del matemático Leibniz para caracterizar lo que, en derecho, es la actividad matemática. El P. Dubarle dirá eso mucho mejor que yo.

R. P. DUBARLE. — Estoy completamente de acuerdo con lo que acabáis de decir sobre Leibniz; no obstante haber sido un matemático genial, no se podría invocar su juicio tratándose de las matemáticas modernas.

ROBINET. — Entonces, el matemático abandona todo fin filosófico y todo fin ontológico.

JEAN WAHL. — Yo querría defender a Leibniz, si es que lo necesita. Creo que él tenía alguna desconfianza respecto de cierta aplicación de las matemáticas; pues como el espacio es homogéneo y el tiempo es homogéneo, ambos son, decía él, cosas ideales. Plantea el problema, y lo resuelve en metafísica por medio de la monadología. Mas, no es mucho lo que le agradan las cosas homogéneas y, por ende, las cosas de la cantidad.

SRA. PRENAN. — Creo que Leibniz consideraba las matemáticas como sistemas de relaciones bien fundadas, que se aplican con buen éxito en el mundo físico, como lo dice Varignon en una carta muy conocida (del 2-II-1702). Lo cual deja gran libertad a su labor de matemático, hasta el punto de que habla de las dimensiones que se pueden concebir más allá de tres. Insiste también, en esa misma carta, sobre la independencia del infinitamente pequeño con respecto a la ontología. En consecuencia, no creo que haya una perfecta correspondencia entre Leibniz y la definición o caracterización que de él se ha querido dar aquí.

MICHEL SOURIAU.— Al comenzar esta sesión se preveían reacciones violentas de parte de los filósofos; no las ha habido, y por una razón muy clara: los filósofos han creído hallarse ante la psicología de la creación matemática.

LICHNEROWICZ.— Creo que tenéis toda la razón.

M. SOURIAU.— Hacen cosas perfectamente semejantes; como lo ha explicado el Sr. Cartan, forjan nuevas palabras a fin de recoger sus nuevas adquisiciones y poder ir más lejos. En cambio, si hubiera físicos en esta sala, no estoy seguro de que no hubiera reacciones. Pues, en otras ocasiones, he oído a algunos físicos protestar contra la exuberancia de los matemáticos; y he oído a matemáticos decir que los físicos no avanzaban con suficiente rapidez más allá de Newton, que eran, en una palabra, gentes retardadas a quienes era necesario empujar. Los físicos, por su parte, hallaban que los matemáticos se movían en todo sentido, sin preguntarse si de ello resultaría algo positivo.

[216]

LICHNEROWICZ.— Habéis planteado una cuestión muy interesante. Pero, en la actualidad, el nombre de físico no es una palabra que, sola, sea clara. La física es hoy una ciencia dividida en disciplinas diversas; un diálogo entre un físico teórico y un experimentador es un diálogo de sordos; la incomprensión entre ellos excede a la que puede existir entre un filósofo y un matemático. El punto que habéis señalado es muy importante. Hágase discurrir a un teórico y a un experimentador, sobre partículas experimentales, por ejemplo: difícil será saber que están tratando sobre la misma cosa. El experimentador hablará de las partículas con un realismo concreto; él las ve, las cuenta en la cámara de burbujas; y por su parte, el teórico se abstendrá de imaginarse de modo preciso esas partículas, y sólo las describirá por un sistema de números.

SOURIAU. — Es el experimentador el que actúa como ontologista.

LICHNEROWICZ. — Exactamente. Sólo la experiencia misma muestra que, en ese diálogo, es el experimentador quien yerra: porque toda imagen concreta de la partícula conduce de modo automático a resultados experimentalmente falsos; el punto de vista del experimentador no es más que una aproximación, a la vez grosera y cómoda.

SRA. A. R. WEILL.— A propósito de la intervención del Sr. Souriau, yo querría sólo agregar lo siguiente. Cuando W. Heitler dice que el electrón puede "representarse como una esfera que gira en torno del eje de la dirección del spin"... agrega inmediatamente que "esta representación no debe ser tomada a la letra. Ninguna forma de *realidad física* puede ser vinculada a la *estructura* del electrón".

JEAN WAHL. — Debo levantar la sesión, después de este interesante debate suscitado por la exposición del Sr. Lichnerowicz, que yo agradezco cordialmente en nombre de todos vosotros.

[217]

INTERVENCIONES POR CORRESPONDENCIA

*23-*II*-1965*

Observaciones de MAURICE FRÉCHET

Lamento no hallarme en estado de asistir a la sesión en que el Sr. Lichnerowicz hará su exposición. He podido, no obstante, leer la circular en que él la condensa y sólo en ese resumen me baso para presentar las observaciones que siguen.

El resumen me ha interesado mucho y en general estoy de acuerdo con lo que en él se expone. Sin embargo, disiento, aunque sólo por matices, respecto de algunos puntos.

I. —Para comenzar, tengo la impresión de que hay un sentimiento esparcido entre las nuevas generaciones. Según él, la época reciente (entre 1900 y 1920, precisa el Sr. Lichnerowicz) ha visto una revolución total en el aspecto de las matemáticas, revolución de tal naturaleza que nunca antes ha habido otra que se le asemeje.

Empero, después del brillante período de las matemáticas griegas, ¿el aparecimiento del álgebra no ha constituido una revolución por lo menos tan importante como aquélla? ¿Y no ha ocurrido otro tanto con la introducción del cálculo diferencial e integral por Newton y Leibniz? Muchos se lanzaron entonces, cabeza gacha, a las aplicaciones, sin cuidarse del rigor. Fueron Gauchy y sus contemporáneos quienes se propusieron, y con buen éxito, volver a ese rigor.

II. —El Sr. Lichnerowicz anota que el discurso matemático nunca está acabado, sino que constantemente debe perfeccionarse a fin de ser portador de nuevos mensajes matemáticos. Eso es perfectamente exacto, pero lo mismo cabe decir de todas las demás ciencias.

III. —"Es paradojal ver este juego, por lo general gratuito, morder en lo real y conferirle una cierta inteligibilidad". A menudo vemos, expresada por los jóvenes, esta interpretación del vínculo entre las matemáticas puras y sus aplicaciones: primero, la teoría axiomática, frecuentemente gratuita, y *en seguida* las aplicaciones.

Hasta una época reciente, los más grandes matemáticos escribían que el objetivo final de las matemáticas era la explicación de la Naturaleza y la predicción de sus fenómenos. Y aun en la época actual, el Sr. Choquet escribe: "Toda actividad matemática se descompone en ciclos grandes o pequeños, en cada uno de los cuales se reconocen, *grosso modo*, las etapas siguientes: *observación, matematización*, deducción, aplicación".

[218]

En sentido aparentemente contrario, es estrictamente exacto que hay un trabajo interior de las matemáticas para armonizar y generalizar las nociones adquiridas, para deducir automáticamente, por medio de transformaciones adecuadas, un resultado, de otro. Mas, remontando el curso de la historia, se ve que los puntos de partida provienen del estudio de un fenómeno natural cuya complejidad ha exigido que se le idealice matemáticamente y *aproximativamente.* Lo cual significa que no podemos tener "plena inteligencia constitutiva de una ciencia objetiva". No nos es posible tener de ella sino una imagen *deformada,* pero simplificada por una teoría matemática apropiada, basada sobre axiomas *apropiados.*

IV. —Es posible, por lo demás, que al preparar los detalles de su conferencia, el pensamiento del Sr. Lichnerowicz espontáneamente se haya revelado menos distante de las observaciones que acabamos de presentar.

Observaciones del R. P. FRANÇOIS RUSSO

El término comunicación no traduce el carácter más fundamental de la redacción de una memoria que es ante todo una *objetivación.*

Cabe decir, sin duda, que la matemática es un juego; pero de ese modo no se traduce en grado suficiente su importancia y su carácter de "tarea". El ejercicio de la matemática responde a una vocación. Pues bien, no se juega por vocación.

No es exacto que el pensamiento humano, siempre y respecto de toda realidad, se haya propuesto dar una expresión matemática. Por largo tiempo, su propósito de matematización ha estado limitado a un dominio estrecho. Y aun hoy, las posibilidades universales de la matemática no son reconocidas plenamente. Sobre todo, sólo muy tarde se ha comprendido que la acción podía ser matematizada. Hasta entonces no se había tenido en vista sino la matematización de los fenómenos naturales independientes del hombre.

El Sr. Lichnerowicz ha subrayado en forma adecuada la distinción entre dos aspectos de las matemáticas: comunicación y actividad creadora. Pero habría que insistir más en el hecho de que el matemático, por pureza de estilo, se abstiene de dar a conocer sus motivaciones y sus modos de discurrir[1]. Lo cual hace sobre todo muy difícil el trabajo del historiador del pensamiento científico, [219] sin contar al desafortunado discípulo que tanto necesitaría ver cómo el inventor ha logrado llegar a sus descubrimientos, y esto, porque hay en esos modos de discurrir una inteligibilidad que merecería ser tomada en consideración. Los procesos mentales del que crea no son sino aparentemente desordenados y arbitrarios. Tienen una "razón", y sería altamente valioso conocerla.

Observaciones de JEAN ULLMO

París, 27-II-*1965*

La exigencia de comunicación es seguramente una necesidad interna del discurso matemático y determina su formalización y su expresión en *isomorfismo*.

Pero también el conocimiento del mundo exterior introduce necesariamente esas exigencias de comunicación y de isomorfismo. No es ya sólo cuestión de comunicar para comprenderse, se trata de comunicar para ponerse de acuerdo sobre lo que se quiere conocer; esto es lo que en otra ocasión he llamado la exigencia de consenso, que explica la intervención de los grupos en todas las teorías avanzadas de la física. Es una condición necesaria de objetividad, pues lo menos que pueden pedir diversos observadores o experimenta-

[1]El original dice: "ses cheminements" *N. del T.*

dores es tener un medio de saber que hablan "de la misma cosa". Además, este mundo exterior, bien sabemos que está formado de *estructuras* específicas de cada nivel de la realidad. También es normal que esas estructuras aparezcan en nuestros modelos sucesivos cada vez más perfeccionados como isomorfismos (o a lo menos como homomorfismos de un modelo más fino a un modelo más grosero).

Por esas dos razones, condición necesaria del consenso para afirmar la objetividad, naturaleza estructural de esta objetividad, la ciencia de la naturaleza tiene justamente necesidad del instrumento que le fabrica la ciencia del espíritu, la Matemática, movida tan sólo por su objetivo de inteligibilidad (es decir de comunicación entre sujetos inteligentes).

[220]

Carta del Dr. H. JEAN BARRAUD

20-II-*1965*

Sr. Profesor: con ocasión de vuestra próxima conferencia, me permito someter a vuestra consideración dos o tres cuestiones que me he planteado a mí mismo.

Como cualquier profano, admiro y envidio la ascesis del matemático y el genio de que da prueba. Sin embargo, a veces me pregunto si las matemáticas no constituyen ellas mismas una vasta ontología a partir del concepto de ser matemático, en el sentido platónico del término. ¿El discurso objetivo e indeformable no se apoya necesariamente sobre invariantes que de hecho constituyen absolutos ónticos?

Por otra parte, si es verdad que la actividad de creación matemática logra morder en lo real, ajustarlo en cierto modo a un molde de pura abstracción, lo real de que se trata no es sino una realidad cuantitativa, mensurable y susceptible de repetirse. En este caso ¿no volvemos a encontrar el postulado de la identidad en el tiempo, formulado por E. Meyerson? Además ¿deben ser rechazadas numerosas ciencias experimentales, en primer lugar la biología, fuera de la objetividad pura?

Por vía de consecuencia, la ascesis constituida por el paso del discurso de tipo "poético" al "autodiscurso" del matemático ¿no comporta la puesta entre paréntesis del discurso del biólogo? Y de una manera general ¿no resulta imposible realizar una "síntesis dialéctica" tal como lo recomienda F. Gonseth?

No siendo yo más que un simple licenciado, nada mejor puedo esperar que hallar en vuestra conferencia una respuesta a mis propias incertidumbres, y por ello os doy de antemano mis agradecimientos.

J. B.

Carta de GEORGES BÉNÉZÉ.

8 de marzo de 1965

Querido Señor:

Creo haber comprendido lo que entendéis por "ruido de fondo" a propósito de la información. Sería todo lo que ella presupone, todo lo constituido por lo que aún no es ella, pero sin lo cual ella no tendría todo su sentido; dicho de otro modo, sería el conjunto

[221]

—cuando se quiere ver con claridad— de los postulados y definiciones que preceden al cuerpo de la ciencia misma. Hay, pues, siempre un ruido de fondo, inevitable. Pero, entonces, el interés del saber en general es circunscribirlo de la mejor manera posible, no tanto en provecho de la información, que seguirá siendo lo que es, sino de todo lo que el pensamiento del que piensa lleva en sí. He aquí un ejemplo:

La aritmética pide (postula), al comienzo, la serie de los enteros: 1, 2, 3 . . . , cada número obtenido por la adición de la unidad al número precedente. Pero ¿qué es esta unidad? ¿De dónde viene? El hombre de ciencia no necesita preguntárselo. Ella está ahí. La toma, simplemente.

Sí, pero, no obstante eso, hay que discutir a su respecto. Ella obliga, entre otras cosas, a decir que hay tanta cantidad numérica entre 3 y 4 como entre 7 y 8, por ejemplo. Pero esta expresión "tanta cantidad numérica" no tiene ningún sentido, y no hace otra cosa que dar un nombre al problema. Pues no se puede decir que hay *tantos* números entre 3 y 4 como entre 7 y 8, ya que: a) los números distintos de los enteros no han sido creados aún, y b) hay tantos como se quiera (cuando están creados).

En realidad, esta unidad que así se agrega a un número para formar el siguiente, no es un número, en el sentido de que ella es *absolutamente* indivisible, y que no llega a ser número sino cuando se la admite como divisible. Y esa indivisibilidad es indispensable, pues volvemos a encontrarla, introducida entre dos números creados en seguida en el interior de la unidad número, por ejemplo entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$. Es la misma indivisibilidad, el mismo *todo de una vez.* Ahí está el origen de la palabra *entero* (integer), que vuelve a encontrarse en los números ordinales: no hay "tercero y medio".

Esa diferencia entre las dos especies de unidad, la divisible y la indivisible, no interesa al aritmético, que ante todo postula y mantiene la divisibilidad: así no tendrá obstáculo en la creación de otros números. Pero debe interesar al filósofo, que tiene un derecho (y hasta un deber) de inspección: pues es evidente que hay oposición, si no inclusive contradicción, entre las dos. Y, sin duda, hay dos. La divisible puede ser referida a una estructura (en el sentido de la Gestalt). La otra es absoluta y viene del espíritu. El número es una combinación de las dos, lo que indica un doble origen.

¿Qué consecuencias para las matemáticas? Ninguna, puesto que la aritmética comienza cuando el número está creado (bajo el aspecto de la serie de los enteros). Pero para el filósofo, las hay:

a) la serie es, sin duda, fundamental, puesto que a partir de ella son creados los otros números;

[222]

b) la unidad indivisible, es la unidad de la lógica, la armadura de la extensión de un concepto. Lógica y aritmética serán, pues, inseparables si se quiere, *de hecho,* pero *no en derecho,* ante un análisis que, "remontando hacia las fuentes", distingue los inseparables mismos. Por lo tanto, habrá que hacer de la lógica una ciencia distinta de la aritmética, así como de todas las demás ciencias. No habría, pues, sino una sola lógica, que puede aparecer como diversa según el agregado de realidad que se le proporciona, pero que en verdad es independiente.

El sábado último, me preguntábais qué autonomía les dejaba yo, en cuanto filósofo, a las ciencias. Este ejemplo puede responder: la del dominio que delimitan nuestras definiciones y postulados, propiamente científicos, y distintos de los lógicos. La aritmética, en su punto de partida, postula la divisibilidad de la unidad, no obstante servirse inconscientemente de la indivisibilidad que da su sentido a la serie de los enteros. Ruido de fondo. Esto no puede inquietarle al hombre de ciencia; en caso contrario, sería filósofo.

¿Puede esta visión filosófica ser útil a las ciencias? Lo ignoro, pues no soy hombre de ciencia. Mas, yo observo —para pasar a otro dominio— que esta identidad de la unidad indivisible está en el origen de la noción de *exactitud,* que no puede ser suministrada por la experiencia. Por lo tanto, si a un físico se le ocurre decir que a él no le inquieta la cuestión de la exactitud (en la medida), allá él, pero yo hago notar que la noción de inexactitud (o de error) no tiene sentido sino comparada con la exactitud ideal que, a pesar suyo, su espíritu impone a lo percibido. Ruido de fondo, todo eso. He ahí una línea divisoria entre ciencia y filosofía. Bien sabemos que los agrimensores se ven obligados a pisar en los dos dominios cuyo límite deben fijar. Pero no por eso los dos dominios dejan de ser distintos.

Perdonad la excesiva extensión de esta carta.

G. B.

Carta de la Sra. Lodetti Boyer

París, 19-II-*1965*

Querido Señor:

Yo no me atrevería a dar una opinión sobre la epistemología de una ciencia tan elevada, si vuestras reflexiones sobre el tema no me ofrecieran ningún punto común con los resultados de mis modestas investigaciones filosóficas sobre *la existencia y la expresión.* Algunos de esos resultados ya son conocidos, otros deben ser publi-

[223]

cados, precisamente con ese título. Veo que distinguís dos formas de lenguaje, un discurso de comunicación y un autodiscurso de naturaleza completamente diferente, "de tipo poético". No me parece inútil interpretar vuestros problemas en términos que a mí me los hagan más claros.

Comencemos, si os place, por situar la actividad matemática en el conjunto de la actividad humana. Lo que os hace decir que, por su aspecto creador, ella es un discurso *de tipo poético,* es el carácter común a toda creación, del que ella participa. Y, precisamente, en toda actividad, el momento creador es el de una inteligencia intuitiva que, por un error de terminología, es llamada imaginación: lo que "ve" el espíritu que descubre es idea y no imagen. Tal inteligencia opera en el músico como en el físico, en el pintor como en el matemático. El autodiscurso del pensamiento consigo mismo también es común a todas las clases de invención. Yo propondría no llamarlo de inmediato "discurso". Es una palabra, es el lenguaje mismo, es la expresión característica de todo acto contemplativo o intelectual. En las bellas artes, la expresión se halla en estado puro, sin que acto alguno racional se agregue a ella. Pero en la actividad matemática, aun en la puramente inventiva, ocurre algo del todo diferente. Aquí, al lenguaje intelectual y expresivo se agrega un lenguaje racional discursivo. Si considero vuestra descripción de la actividad creadora en las matemáticas, debo dividirla en dos series de conceptos. Los unos convienen a toda creación intelectual, y son ellos los que han podido haceros tomar esta actividad por una actividad sólo intuitiva y este lenguaje por un lenguaje poético. Los otros no convienen sino a las creaciones en que la inteligencia se hace racional, como en las matemáticas, y en que el lenguaje es discursivo.

Creación en general	*Creación matemática*
sensibilidad (matemática), imaginación	(sensibilidad) matemática
crea y juzga	tentativa de deducción (total) a partir de axiomas, etc.
artista consigo mismo	auto-*discurso*
menos abstracto	
intuiciones creadoras	
generador	
"poético", musical, pictórico	

¿Y cuál es la intención de este pensamiento y de este discurso matemáticos? —El conocimiento (tentativa de deducción total) de

[224]

un amplio aspecto de lo *real,* pues la actividad de creación es inspirada "por tal o cual aspecto del *mundo exterior*". (No tomo en cuenta, por el momento, las demás fuentes de inspiración.)

La intención de la actividad artística no es el conocimiento, sino la sola expresión, la excelencia del lenguaje, sin intención alguna de comunicación. ¿Qué es lo que se expresa en las formas artísticas? La existencia. Esta tiene dos caracteres fundamentales: es vivida subjetivamente, antes de toda contemplación objetiva y de toda expresión, antes de todo conocimiento racional; ese es su primer carácter; es vivida en común, y, si se quiere llamar totalidad a esta comunidad vivida, tal totalidad se conserva y se expresa en la contemplación estética; esta comunidad y totalidad es el segundo carácter de la existencia. Antes de extraer de lo dicho una interpretación de vuestro texto, querría señalaros que lo esencial de lo que suele llamarse actividad artística es la contemplación; el nombre de actividad estética le vendría mejor. Lo que caracteriza a toda contemplación, es la belleza de su objeto. Esta belleza es la totalidad de la existencia, que se muestra en una forma individual perfectamente definida. Es la belleza de lo concreto. La actividad artística es un caso particular y excelente de la actividad estética. El concepto de arte es completamente general. El pintor, el poeta, el músico, como especialistas, *expresan* con arte. El matemático *piensa* con arte en el dominio de su especialidad. Cuando, para guiaros en vuestra investigación, os servís de los criterios "de fecundidad y de los criterios estéticos" que la matemática constituida os proporciona, procedéis así porque vuestro genio está cultivado y dispone de una técnica refinada, de un "savoir faire" adquirido y transmitido hasta vos por vuestros maestros a través de los siglos. Sois artista en eso, no porque las matemáticas se parecen a la poesía, sino porque, de una manera absolutamente general, el genio humano se cultiva y se especializa.

Interpretaré ahora otras partes de vuestro texto, sirviéndome de los caracteres de la existencia. Esta es vivida subjetivamente. Pero es vivida en común. Aun cuando se cree estar solo, se está con otros. Por ejemplo, es indudable que uno se individualiza fuertemente en el acto creador, pues la autoridad personal, la responsabilidad propia van comprometidas en él y, más aún, porque una fuerte inclinación, un gusto, un amor son su fuente. Eso no impide que, aun cuando no se piensa o no se habla sino para sí, no se está solo. Habéis escrito: "El discurre consigo mismo", pero habéis agregado, entre paréntesis: "rara vez con otros". Esto significa que vuestro

[225]

discurso sería accesible a algunos. Y esa matemática constituida que os inspira ¿es acaso propiedad vuestra? En todo acto humano, la conciencia es común y sus juicios también lo son. Aun antes de haber "comunicado" a otros el propio juicio, juzgamos en lo universal. Por eso, no creo que sea necesario distinguir radicalmente, en la actividad matemática, el momento de la creación y el momento de la comunicación. Consideremos en primer lugar las intenciones. Entre un matemático y otro, ellas son comunes. El que inventa busca deducir un aspecto de lo real; no veo entonces por qué aquellos a quienes él comunica su invención podrían desentenderse de su intención y no interesarse sino en la coherencia y en el formalismo del discurso. O, si esta coherencia y este formalismo interesan a sus interlocutores en cuanto matemáticos, también deben interesarle al matemático que habla y esbozarse ya en su propia investigación. Miremos, si así lo aceptáis, la intención de las matemáticas de un modo impersonal, sin distinguir entre los interlocutores, sin siquiera preguntarnos si hay interlocutores.

¿Podemos pensar que su intención general, quiero decir la intención general de las ciencias matemáticas, es *conocer*? Lo que al sabio le interesa es aplicar su razón a la existencia, lo que él traduce por la noción de lo real, que no es sino la existencia cogida en conceptos. Hay, entonces, dos cosas que siempre deben ser consideradas en una ciencia: por una parte, su aparato conceptual, su discurso racional puro; por otra, la relación entre este discurso y el ser. ¿Cómo puede ocurrir que el ser esté presente, bajo la forma de lo real, en la creación matemática, y desaparezca en lo que llamáis la comunicación matemática? ¿No será más bien que, en todo discurso racional tomado independientemente de su intención cognoscitiva, la verdad reside sólo en sus relaciones? Empero, aun antes de la "comunicación", la creación posee ya esta característica, por su aspecto deductivo. Decir que no comunicáis nada más que estructuras, sin ninguna intención ontológica, significa, según mi parecer, que vuestros interlocutores se desinteresan de toda referencia a lo real. Pero entonces no son matemáticos, son extraños al genio matemático, el cual se propone elaborar una "deducción total" de lo real. Agregaré que esta última expresión es contradictoria, pues lo real, la existencia conocida por el hombre, no puede ser sino fragmentaria; no hay sistema de lo real (no hay mundo exterior, es decir, totalidad exterior o real). Debido a eso —por lo demás— habláis de "tal o cual aspecto" del mundo exterior, de un "amplio aspecto de lo real".

[226]

Lo que entendéis por deducción total, es la constitución de un sistema cerrado, cuyos axiomas representan las fronteras, al mismo tiempo límites y encuentro con lo real.

Os proponéis ahora "comunicar", según decís. Parece que este esfuerzo exige un sacrificio. ¿Qué es lo sacrificado? —La intención profunda, el amor a la verdad, la teoría o contemplación que está en el origen de la creación y por lo cual las matemáticas se asemejan a la poesía. ¿Qué otra cosa aun es sacrificada? La fecundidad, no en cuanto poder de repetición, sino como poder de renovación. Al inmovilizarse en una forma que le parece definitiva porque él olvida sus propios límites, el pensamiento se esteriliza. Es paradojal que sea precisamente después de semejante elaboración no-realizadora cuando el pensamiento matemático "muerde en lo real". Pero es que así se ha construido una máquina intelectual y una facultad operatoria que pueden recibir aplicación en la técnica de nuestras industrias. Por este aspecto las matemáticas prolongan y amplifican los procedimientos humanos de acción práctica. Esta "objetividad" puramente humana y subjetiva, no es una relación al ser; sólo traduce relaciones prácticas con lo real.

Llego ahora a lo que llamáis comunicación... Si resumimos y comparamos nuestras concepciones del lenguaje, vemos que halláis dos formas de lenguaje donde yo descubro tres.

Vuestra concepción

Discurso para sí { poesía
matemáticas (creación)

Discurso para los otros (matemática: comunicación)

Mi concepción

Expresión (lenguaje poético)
Concepto, deducción (lenguaje racional) } para sí pero comunes

Comunicación (lenguaje práctico, oratoria) a los otros

Creo, además, que la comunicación aparece de diferente manera a mí que a vos. Según mi opinión, la intención comunicativa no es transmitir alguna verdad. Esa intención es práctica, su fin es hacer nacer sentimientos en otras personas, o provocar actos de parte de ellas. En rigor, yo diría que comunicáis, en el dominio de las matemáticas, si tenéis la intención de obtener que vuestro interlocutor sepa hacer ciertas operaciones y llegue a la constación de ciertos resultados, independientes de su personalidad y dependientes sólo de los datos. Fuera de ciertos efectos prácticos,

[227]

no se puede hablar de comunicación a alguien, es decir, de información, cuando se trata de hombres y no de máquinas. En efecto, ignoramos lo que viene a ser nuestro discurso en el espíritu de otra persona. Cuando escribís que la matemática es "comunicable a otros sin deformación", me parece que no comprendo lo que queréis decir. No creo que se pueda dar una definición satisfactoria de la "comunicación sin deformación", es decir de "la información" cuando el destinatario del mensaje es un ser humano.

Cuando se trata de enseñar, dos discursos son posibles. 1. El discurso esotérico entre interlocutores iniciados. Cada uno habla como si estuviese solo, y lo que les permite entenderse son las preocupaciones comunes, los hábitos y el "savoir faire" comunes. Considero como discurso esotérico tanto el discurso que practicáis "rara vez con otro" como el discurso "coherente y constrictivo[1] para el otro" (pero también para vos mismo). La verdad es dicha, pero no comunicada. Es pensamiento común, caso particular de la existencia común. 2. El discurso exotérico de un iniciado a un no-iniciado. El mensaje puede o no lograr su fin. El sabio trata de ponerse al alcance del ignorante y cree enseñarle la verdad. Lo que consigue es más bien ponerlo en situación de interesarse en ella. El discurso matemático por sí mismo nunca es exotérico; pero este famoso sábado 27, el matemático y sabio que sois dirigirá un discurso exotérico a los ignorantes que somos nosotros los filósofos. Y nosotros no podremos devolveros la mano, pues nuestros conceptos y nuestros razonamientos son cruelmente inferiores a los vuestros.

En compensación, no creo que la matemática se baste a sí misma para "reflexionar sobre sí misma". Cuando habláis de comunicación y de creación, cuando os comparáis al poeta, traspasáis los límites de la matemática. Es entonces cuando podéis conversar con los filósofos.

M. L. B.

[1]Las ideas de constreñimiento, necesidad, rigor, son figuras cuyo origen está en los mitos.

Carta de JACQUES MERLEAU-PONTY

París, 22-II-1965.

Señor:

He recibido la nota de la Sociedad Francesa de Filosofía relativa a vuestra comunicación del sábado próximo. Permitidme formularos, en esta ocasión, una cuestión quizá un poco marginal si se la compara con la materia central de vuestra con- [228] ferencia: Crear, en *Física teórica,* ¿es una actividad exactamente del mismo tipo que crear en *Matemáticas?* El investigador, el inventor en el primero de esos dominios, ¿es conducido por los mismos motivos, progresa según los mismos esquemas que en el segundo? ¿También su pensamiento es deliberadamente "no-ontológico? La ascesis a que él somete su pensamiento ¿se ejerce en el mismo sentido? A mí me parece que en un pasado todavía relativamente reciente se podía, desde lo exterior, hacer la diferencia: Einstein, De Broglie, Dirac ¿han sido creadores *en cuanto matemáticos?* Mas ¿quizá el estado actual de la ciencia excluye ese tipo particular de creación?

J. M. P.

Carta de AIMÉ PATRI

París, 19-II-1965.

Señor y Respetado Maestro:

He tomado conocimiento con el más vivo interés de los argumentos de la comunicación. Estrictamente incompetente para hablar de matemática, no me siento calificado para participar en el debate.

Sin embargo, un punto concerniente a la lógica podría ser de mi competencia, sin que yo pretenda ser un especialista en la materia. Me parece que esa exigencia de *comunicación* que afirmáis y su corolario de una formalización posible (aunque no siempre útilmente efectuada) no conciernen sólo al discurso del matemático, sino, en general, a todo discurso, sin excluir al del filósofo (es lo que yo había querido exponer en mi propia comunicación)[1].

Por eso me resulta difícil acompañaros cuando decís del discurso matemático —que parece identificáis con el discurso lógico— que no sólo "es radicalmente no-ontológico" (lo que yo apruebo enteramente), sino que, además, es "radicalmente inepto para hablar de ontología", lo que ya no concibo, aun considerando desde fuera las matemáticas puras que se aplican por lo menos a la física. No veo paradoja en esto, pues me parece que mientras más grande sea la libertad de esta forma vacía, más rica será la diver-

[229]

sidad de los contenidos que ella permitirá coger (yo no soy kantiano). Pienso que ésta es la razón por la cual el lógico dispone de "$\exists X$ . . ."[2].

Empero, puede ser que se trate de un simple malentendido verbal y que yo no haya comprendido bien el fondo de vuestro pensamiento, expresado en forma inevitablemente sucinta.

Considerando siempre el asunto desde fuera, me parece que la cuestión de las fronteras entre *lógica y matemática* pertenece al dominio de lo convencional. Trátase de saber en primer término si la teoría de los conjuntos debe pertenecer al lógico o al matemático (suponiendo que se les distinga), y no hay duda de que actualmente son los matemáticos quienes se la han anexado. Sin em-

[1]*Nota de la Redacción del Bulletin.* Diversas razones no han permitido publicar la comunicación que el Sr. Aimé Patri envió a la Sociedad Francesa de Filosofía el 23 de enero de 1965, con el título de "Lógica y Fenomenología".

[2]Notación simbólica usada por los lógicos contemporáneos en la representación de las proposiciones existenciales. *N. del T.*

bargo, históricamente, se podría decir que era algo de este género lo que Aristóteles comenzaba a elaborar con su lógica de las clases, base de la silogística, y que él conocía al menos la relación de inclusión, limitándose a las clases no-universales y no-vacías. Más tarde, cuando la lógica de las clases ha sido fundada sobre el cálculo proposicional y prolongada por la lógica de las relaciones, Russell y Whitehead han podido iniciar su empresa de derivar las matemáticas (clásicas) a partir de la lógica, en el sentido tradicionalmente filosófico de esta palabra. Y, como dice Beth, cuando se cambia de lógica (ejemplo: el intuicionismo) se cambia de matemáticas, lo que permite comprender la fecundidad matemática resultante de un cambio de lógica. Siendo hoy evidente que la lógica ha sido capaz de progresar después de Aristóteles (contrariamente a lo que creía Kant), es asimismo evidente que un cuadro lógico preestablecido no se impone al matemático (ni a nadie), lo cual no excluye, según mi opinión, la función universal de la lógica, por el solo hecho de su carácter *formal*. Nadie puede razonablemente desentenderse de la clase de lógica implicada en su discurso, al cual, sin embargo, sólo una condición se impone: la de ser consistente (en el sentido de Emil Post). Y creo que eso es válido también para el "poeta" (aun *stricto sensu*), de quien el matemático se siente hermano, como tan bien lo habéis mostrado. Tampoco el poeta se allana a *decir* cualquier cosa, si es verdaderamente poeta, pues también lo suyo debe tener consistencia, debe sostenerse, como ocurre con toda construcción, cualquiera que ella sea, sin excluir a la filosofía, respecto de la cual se cree a veces que se la insulta si se la asimila a la "poesía".

Lo que yo creería, pues, poder sostener es que la doble actividad de creación y de comunicación, que de modo tan feliz habéis distinguido, está por doquiera, y no sólo en matemáticas.

A. P.

[230]

Carta de la Sra. Virieux-Reymond

Pully (Suiza), 24-II-1965.

Señor y Querido Colega:

. . . Me habría gustado, entre otras preguntas, haceros la siguiente: si el hecho de que la identidad ha sido reemplazada por el isomorfismo no proviene de que a la noción del número: idea estática, de los antiguos, se ha sustituido la concepción del número: símbolo operatorio . . . Igualmente me habría gustado preguntaros si los principios de la lógica clásica no guardan su valor rector y anterior en el nivel de la razón constituyente, que sin duda nos dirige en toda nuestra actividad intelectual, y que no es sino al nivel de la razón constituida donde se recurre a la elección de una lógica bi o plurivalente . . . Finalmente ¿no hay una especie de ontología matemática en la medida misma en que existen estructuras invariantes?

A falta de la alegría que habría tenido al escucharos, me alegro por el placer diferido de leeros cuando vuestra exposición se publique . . .

A. V. R.